DS de Printemps - Corrigé

18 avril 2014

Exercice 1

(i) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction 4 fois dérivable. La formule de Taylor-Lagrange affirme qu'il existe un point $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f^{(2)}(a) + \frac{(b-a)^3}{6} f^{(3)}(a) + \frac{(b-a)^4}{24} f^{(4)}(c).$$

(ii) Pour $f(x) = \exp(x)$, $a = 0$, $b > 0$. La formule de Taylor-Lagrange dit alors qu'il existe un point $c \in]0, b[$:

$$\exp(b) = 1 + b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{6} + \frac{b^4}{24} \exp(c)$$

donc

$$\left| \exp(b) - \left(1 + b + \frac{b^4}{2} + \frac{b^3}{6} \right) \right| \leq \frac{b^4}{24} \exp(c).$$

Enfin, comme la fonction exp est croissante, $\exp(c) \leq \exp(b)$, et donc on obtient le résultat demandé.

(iii) Le résultat du (ii) permet d'approcher $\exp(b)$ par le polynôme $1 + b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{6}$. En choisissant $b = \frac{1}{2}$, on approche $\exp(\frac{1}{2})$ par $\frac{79}{48} \simeq 1.6458$.

(iv) L'erreur commise est majorée par $\frac{(\frac{1}{2})^4}{24} \exp(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{192}$ si on admet $\exp(\frac{1}{2}) \leq 2$. L'erreur est d'un ordre inférieur à 10^{-2}. On peut donc écrire

$$\exp\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 1,64$$

avec une erreur de l'ordre de 10^{-2}.

Exercice 2

(i)

$$\sin(x) = x + o(x)$$

et

$$\sin^2(x) = x^2 + o(x^2).$$

Le dénominateur s'annule à l'ordre 2, il faut donc calculer un DL du numérateur à l'ordre 2 au moins.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

La fonction cos vaut 1 en 0. Il faut donc calculer un $DL(2)$ de la fonction $\sqrt{}$ en 1. Or

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$$

On applique cette formule avec $y = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, en notant bien qu'une quantité négligeable devant y est négligeable devant x^2,

$$\sqrt{\cos(x)} = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

On trouve donc

$$\frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{(\sin^2(x))^2} = \frac{-\frac{x^2}{4} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{4} + o(1)}{1 + o(1)}$$

donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{(\sin^2(x))^2} = -\frac{1}{4}$$

(ii) Du fait du x^3 au dénominateur, on a besoin d'un DL du numérateur à l'ordre 3 au moins. On a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

donc

$$\frac{\cos(x)}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

D'autre part

$$\exp(-x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

d'où

$$\frac{\cos(x)}{1+x} - \exp(-x) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

et

$$\frac{\frac{\cos(x)}{1+x} - \exp(-x)}{x^3} = -\frac{1}{3} + o(1).$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos(x)}{1+x} - \exp(-x)}{x^3} = -\frac{1}{3}.$$

(iii)

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$\sin(0) = 0$ on a donc besoin d'un $DL(4)$ de $\ln(1+y)$ en 0, qui vaut

$$\ln(1+y) = y - \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4),$$

et donc

$$\ln(1+\sin(x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

or

$$\exp(-x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

donc

$$\frac{\ln(1+\sin(x)) + \exp(-x) - 1}{x^4} = -\frac{1}{24} + o(1)$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(x)) + \exp(-x) - 1}{x^4} = -\frac{1}{24}.$$

Exercice 3

(i) Dans l'énoncé, on suppose que f est dérivable sur I et que

$$f'(x) = \frac{1}{1+f(x)}$$

Comme f est dérivable, et qu'on suppose que $1+f(x)$ ne s'annule pas, $\frac{1}{1+f(x)}$ c'est à dire f' est dérivable sur I. Donc f est deux fois dérivable sur I. Supposons que f soit k fois dérivable sur I. Il en est de même pour $\frac{1}{1+f(x)}$ c'est à dire f' donc f est $k+1$ fois dérivable sur I. Par récurrence, f est infiniment dérivable sur I.

(ii) Comme f admet une dérivée d'ordre 4 en 0, elle admet un $DL(4)$ en 0. On l'écrit donc

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + o(x^4).$$

(iii) Dans la formule précédente $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$. D'après l'hypothèse faite dans l'énoncé, on a donc $a_0 = 0$. D'autre part $f'(0) = \frac{1}{1+f(0)} = 1$ et donc $a_1 = 1$.

(iv) D'après le cours, f' admet un $DL(3)$ en 0 qui vaut

$$f'(x) = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + o(x^3).$$

(v) Comme $f(0) = 0$, on considère donc le $DL(3)$ en 0 suivant

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + o(y)$$

Avec $y = f(x)$,

$$\frac{1}{1+f(x)} = 1 - x + (1-a_2)x^2 + (2a_2 - a_3 - 1)x^3 + o(x^3).$$

(vi) L'égalité

$$f'(x) = \frac{1}{1+f(x)}$$

donne 2 développements limités pour la fonction f'. L'unicité du développement limité implique alors

$$2a_2 = -1, \quad 3a_3 = 1 - a_2, \quad 4a_4 = 2a_2 - a_3 - 1,$$

donc

$$a_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad a_3 = \tfrac{1}{2}, \quad a_4 = -\tfrac{5}{8}.$$