Contrôle 3 – Corrigé

Nom : Prénom : Durée : 15 min

On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ défini par :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 8t - \dfrac{3}{t^2} + 5 \\ y(t) = 3t^2 + 4t + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

Partie A : Etude autour de $t = -1$.

1. **Etudier la nature du point de $\mathcal{C}$ de paramètre $t = -1$.**

$$\begin{cases} x'(t) = 2t + 8 + \dfrac{6}{t^3} \\ y'(t) = 6t + 4 - \dfrac{2}{t^3} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{F}'(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x''(t) = 2 - \dfrac{18}{t^4} \\ y''(t) = 6 + \dfrac{6}{t^4} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{F}''(-1) = \begin{pmatrix} -16 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{F}''(-1)$ est le premier vecteur dérivé non nul.

$$\begin{cases} x^{(3)}(t) = \dfrac{72}{t^5} \\ y^{(3)}(t) = -\dfrac{24}{t^5} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{F}^{(3)}(-1) = \begin{pmatrix} -72 \\ 24 \end{pmatrix} = 24 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{F}^{(3)}(-1)$ est le premier vecteur dérivé non nul, non colinéaire à $\overrightarrow{F}''(-1)$.
$(\overrightarrow{F}''(-1); \overrightarrow{F}^{(3)}(-1))$ est un famille libre ($p = 2$ et $q = 3$ avec les notations du cours).
2 est pair, 3 est impair $\Rightarrow$ En $t = -1$, la courbe possède un point de rebroussement de première espèce.

2. **Donnez l'équation de la tangente à la courbe en ce point.**
ATTENTION : Le vecteur directeur de la tangente est donné par le premier vecteur dérivée <u>non nul</u>.
Ici, l'équation de la tangente est donnée par :

$$\Delta : (y - y(-1))x''(-1) = (x - x(-1))y''(-1)$$

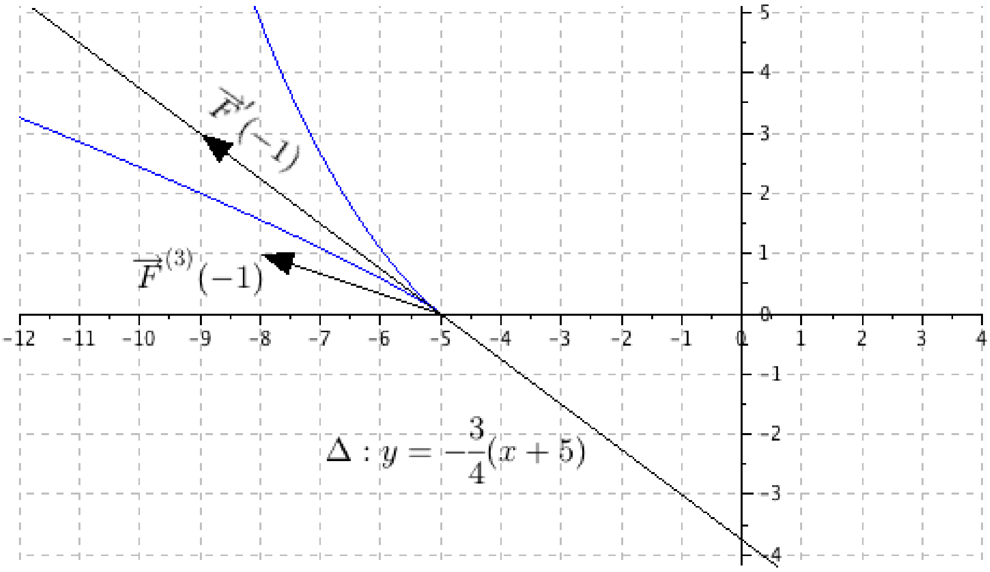
$$\Delta : (y - 0)(-16) = (x + 5)12 \Rightarrow \Delta : y = \frac{-3}{4}(x + 5)$$

Remarque : On pouvait également donner l'équation de Δ sous forme paramétrique (valeur du point + t fois le vecteur directeur de la tangente qui est donné par la premier vecteur dérivé non nul) :

$$\overrightarrow{\Delta}(t) = \overrightarrow{F}(-1) + t\overrightarrow{F}''(-1)$$

3. **Reporter les informations apportées par les questions 1. et 2. sur le graphique.**
On place le point $\overrightarrow{F}(-1)$, les vecteurs $\overrightarrow{F}''(-1)$ et $\overrightarrow{F}^{(3)}(-1)$ depuis ce point ainsi que la tangente.

4. **Tracer (également sur le graphique) l'allure de la courbe au voisinage de $t = -1$.**
On a un point de rebroussement de première espèce donc la courbe traverse la tangente.



Partie B : Montrer que $\mathcal{C}$ possède une branche infinie lorsque t tend vers 0 et étudier sa nature.
$\lim_{t\to 0} x(t) = -\infty$ et $\lim_{t\to 0} y(t) = +\infty$, donc il y a une branche infinie lorsque $t \to 0$.

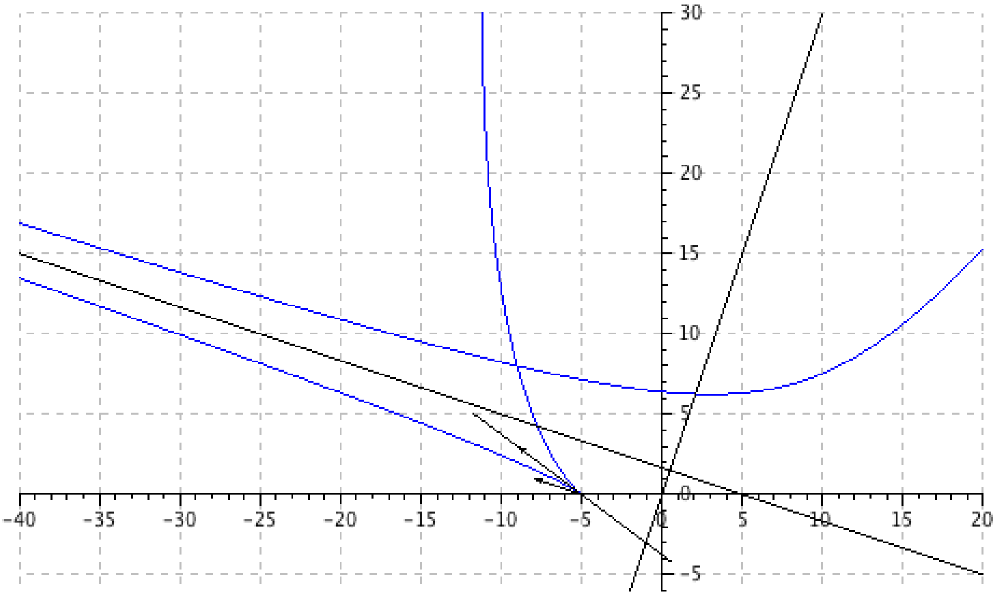
$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2+4t+\frac{1}{t^2}}{t^2+8t-\frac{3}{t^2}+5} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^4+4t^3+1}{t^4+8t^3-3+5t^2} = -\frac{1}{3}$$

On calcule alors :

$$\lim_{t\to 0} y(t) + \frac{1}{3}x(t) = \lim_{t\to 0} 3t^2+4t+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{3}\left(t^2+8t-\frac{3}{t^2}+5\right) = \lim_{t\to 0} \frac{10}{3}t^2+\frac{20}{3}t+\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Ainsi, la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$ est une asymptote oblique à la courbe lorsque $t \to 0$.

Pour aller plus loin : Si vous souhaitez étudier la fonction de A à Z, alors :
- Vous identifierez que le seul point critique est $t = -1$.
- Après avoir dressé le tableau de variations, vous remarquez qu'il y a 3 branches infinies : en $t = 0$ et en $t = \pm\infty$. La nature de la branche infinie en $t = 0$ a été détreminée dans ce contrôle (asymptote oblique d'équation $y = \frac{-1}{3}x + \frac{5}{3}$). Lorsque $t \to -\infty$ et $t \to +\infty$, on trouve une branche parabolique de direction $y = 3x$. Chacune de ces droites, est représentée sur la figure qui suit, ainsi que le tracé complet de la courbe.
- La fonction présente également un point double qui est $M(-9, 8)$. Ce point est atteint lorsque $t = -1 + \sqrt{2}$ et lorsque $t = -1 - \sqrt{2}$.



30
25
20
15
10
5
0
−5
−40
−35
−30
−25
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20