Outils numériques pour la mécanique

Un survol de problèmes divers

Luc Mieussens

2018

Quelques problèmes

1. Schémas semi-implicites
2. Stabilité L^2 : méthode d'énergie
3. Problèmes mixtes
4. Systèmes hyperboliques pour la propagation d'ondes

Schémas semi-implicites

- exemple : équation de la chaleur non linéaire

$$\partial_t u = \partial_x (D(u)\partial_x u)$$

- schéma explicite :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x}\left(D(u^n_{i+\frac{1}{2}})\frac{u^n_{i+1} - u^n_i}{\Delta x} - D(u^n_{i-\frac{1}{2}})\frac{u^n_i - u^n_{i-1}}{\Delta x} \right),$$

où $u^n_{i\pm\frac{1}{2}} = (u^n_i + u^n_{i\pm 1})/2$ (ordre 2 en espace, 1 en temps)

- stabilité L^∞ :

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(D(u^n_{i-\frac{1}{2}}) + D(u^n_{i+\frac{1}{2}}))\right) u^n_i + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} D(u^n_{i-\frac{1}{2}}) u^n_{i-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} D(u^n_{i+\frac{1}{2}}) u^n_{i+1}$$

condition CFL :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{D(u^n_{i-\frac{1}{2}}) + D(u^n_{i+\frac{1}{2}})} \quad \text{pour tout i}$$

Schémas semi-implicites

- exemple : équation de la chaleur non linéaire

$$\partial_t u = \partial_x (D(u)\partial_x u)$$

- schéma explicite :

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x}\left(D(u^n_{i+\frac{1}{2}})\frac{u^n_{i+1}-u^n_i}{\Delta x} - D(u^n_{i-\frac{1}{2}})\frac{u^n_i - u^n_{i-1}}{\Delta x}\right),$$

où $u^n_{i\pm\frac{1}{2}} = (u^n_i + u^n_{i\pm 1})/2$ (ordre 2 en espace, 1 en temps)

- stabilité L^∞ :

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(D(u^n_{i-\frac{1}{2}}) + D(u^n_{i+\frac{1}{2}}))\right) u^n_i + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} D(u^n_{i-\frac{1}{2}}) u^n_{i-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} D(u^n_{i+\frac{1}{2}}) u^n_{i+1}$$

condition CFL :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{\max_i (D(u^n_{i+\frac{1}{2}}) + D(u^n_{i+\frac{1}{2}}))}$$

Schémas semi-implicites

- exemple : équation de la chaleur non linéaire

$$\partial_t u = \partial_x (D(u)\partial_x u)$$

- schéma explicite :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x}\left(D(u_{i+\frac{1}{2}}^n)\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} - D(u_{i-\frac{1}{2}}^n)\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}\right),$$

où $u_{i\pm\frac{1}{2}}^n = (u_i^n + u_{i\pm 1}^n)/2$ (ordre 2 en espace, 1 en temps)

- stabilité L^∞ :

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(D(u_{i-\frac{1}{2}}^n) + D(u_{i+\frac{1}{2}}^n))\right) u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} D(u_{i-\frac{1}{2}}^n) u_{i-1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} D(u_{i+\frac{1}{2}}^n) u_{i+1}^n$$

condition CFL :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\max_i(D(u_{i+\frac{1}{2}}^n))}$$

Schémas semi-implicites

- Schéma implicite :

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x}\left(D(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1})\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_i^{n+1}}{\Delta x} - D(u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})\frac{u_i^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}\right)$$

- problème : système non linéaire à résoudre à chaque pas de temps

$$A(u^{n+1})u^{n+1} = u^n$$

difficile, coûteux (Newton dans $\mathbb{R}^{i_{max}}$)

- schéma semi-implicite :

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x}\left(D(u_{i+\frac{1}{2}}^{n})\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_i^{n+1}}{\Delta x} - D(u_{i-\frac{1}{2}}^{n})\frac{u_i^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}\right),$$

- système à résoudre à chaque pas de temps : linéaire

$$A(u^n)u^{n+1} = u^n$$

- schéma du même ordre, et inconditionnellement L^2 stable

Stabilité L^2 : méthode d'énergie

- l'analyse de von Neumann est limitée aux équations linéaires, à coefficients constants, discrétisées avec un maillage à pas constant
- l'analyse par MOL nécessite le calcul de valeurs propres, ce n'est pas toujours facile
- autre approche : méthode d'énergie
- présentée ici pour des CL périodiques
- consiste à mimer le calcul continu suivant :

$$\partial_t u = D\partial_{xx} u$$

Stabilité L^2 : méthode d'énergie

- l'analyse de von Neumann est limitée aux équations linéaires, à coefficients constants, discrétisées avec un maillage à pas constant
- l'analyse par MOL nécessite le calcul de valeurs propres, ce n'est pas toujours facile
- autre approche : méthode d'énergie
- présentée ici pour des CL périodiques
- consiste à mimer le calcul continu suivant :

$$\partial_t u = D\partial_{xx} u$$

1) multiplication par u et intégration en x

Stabilité L^2 : méthode d'énergie

- l'analyse de von Neumann est limitée aux équations linéaires, à coefficients constants, discrétisées avec un maillage à pas constant
- l'analyse par MOL nécessite le calcul de valeurs propres, ce n'est pas toujours facile
- autre approche : méthode d'énergie
- présentée ici pour des CL périodiques
- consiste à mimer le calcul continu suivant :

$$\int_0^1 u(t,x)\partial_t u \, dx = \int_0^1 u(t,x)\partial_{xx} u, dx$$

1) multiplication par u et intégration en x

Stabilité L^2 : méthode d'énergie

- l'analyse de von Neumann est limitée aux équations linéaires, à coefficients constants, discrétisées avec un maillage à pas constant
- l'analyse par MOL nécessite le calcul de valeurs propres, ce n'est pas toujours facile
- autre approche : méthode d'énergie
- présentée ici pour des CL périodiques
- consiste à mimer le calcul continu suivant :

$$\int_0^1 u(t,x)\partial_t u \, dx = \int_0^1 u(t,x)\partial_{xx} u, dx$$

2) intégration par parties

Stabilité L^2 : méthode d'énergie

- l'analyse de von Neumann est limitée aux équations linéaires, à coefficients constants, discrétisées avec un maillage à pas constant
- l'analyse par MOL nécessite le calcul de valeurs propres, ce n'est pas toujours facile
- autre approche : méthode d'énergie
- présentée ici pour des CL périodiques
- consiste à mimer le calcul continu suivant :

$$\int_0^1 \partial_t u^2(t,x)/2 \, dx = \underbrace{[u(t,x)\partial_x u]_0^1}_{=0} - \underbrace{\int_0^1 (\partial_x u)^2 \, dx}_{\leq 0}$$

2) intégration par parties

Stabilité L^2 : méthode d'énergie

- l'analyse de von Neumann est limitée aux équations linéaires, à coefficients constants, discrétisées avec un maillage à pas constant
- l'analyse par MOL nécessite le calcul de valeurs propres, ce n'est pas toujours facile
- autre approche : méthode d'énergie
- présentée ici pour des CL périodiques
- consiste à mimer le calcul continu suivant :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2(t,x)\,dx \leq 0$$

3) norme L^2 décroissante

Stabilité L^2 : méthode d'énergie

- l'analyse de von Neumann est limitée aux équations linéaires, à coefficients constants, discrétisées avec un maillage à pas constant
- l'analyse par MOL nécessite le calcul de valeurs propres, ce n'est pas toujours facile
- autre approche : méthode d'énergie
- présentée ici pour des CL périodiques
- consiste à mimer le calcul continu suivant :

$$\int_0^1 u^2(t,x)\,dx \leq \int_0^1 u_0(x)\,dx$$

3) norme L^2 décroissante

Stabilité L^2 : méthode d'énergie

- l'analyse de von Neumann est limitée aux équations linéaires, à coefficients constants, discrétisées avec un maillage à pas constant
- l'analyse par MOL nécessite le calcul de valeurs propres, ce n'est pas toujours facile
- autre approche : méthode d'énergie
- présentée ici pour des CL périodiques
- consiste à mimer le calcul continu suivant :

$$\int_0^1 u^2(t,x)\,dx \le \int_0^1 u_0(x)\,dx$$

- méthode puissante (adaptable aux problèmes avec conditions aux limites non périodiques)

Stabilité L^2 : méthode d'énergie

- produit scalaire et norme L^2

$$(u|v) = \sum_i u_i v_i \Delta x \quad \text{et} \quad \|u\|_2^2 = (u|u)$$

- opérateur différences finies :

$$(D^+u)_i = u_{i+1} - u_i, \quad (D^-u)_i = u_i - u_{i_1}$$
$$(D^2u)_i = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}$$

- formule utile 1 : version discrète de $f'' = (f')'$

$$D^2u = D^+(D^-u)$$

- formule utile 2 : intégration par parties discrètes

$$(D^+u|v) = -(u|D^-v)$$

- formule utile 3 : version discrète de $f \times f' = (f^2)'/2$

$$(D^+u)_i u_i = \frac{1}{2}((D^+u^2)_i + (D^+u)_i^2)$$

Stabilité L^2 : méthode d'énergie

- écriture vectorielle du schéma :

$$u^{n+1} - u^n = \sigma D^+ D^- u^{n+1}$$

avec $\sigma = D\Delta t / \Delta x^2$

Stabilité L^2 : méthode d'énergie

- écriture vectorielle du schéma :

$$u^{n+1} - u^n = \sigma D^+ D^- u^{n+1}$$

  avec $\sigma = D\Delta t / \Delta x^2$

- multiplication par u^{n+1} et intégration

$$(u^{n+1} - u^n | u^{n+1}) = \sigma (D^+ D^- u^{n+1} | u^{n+1})$$

Stabilité L^2 : méthode d'énergie

- écriture vectorielle du schéma :

$$u^{n+1} - u^n = \sigma D^+ D^- u^{n+1}$$

  avec $\sigma = D\Delta t/\Delta x^2$
- multiplication par u^{n+1} et intégration

$$(u^{n+1} - u^n | u^{n+1}) = \sigma(D^+ D^- u^{n+1} | u^{n+1})$$

- version discrète de $f \times f' = (f^2)'/2$ et intégration par parties discrètes :

$$\frac{1}{2}(\|u^{n+1}\|_2^2 - \|u^n\|_2^2 + \|u^{n+1} - u^n\|_2^2) = -\sigma(D^- u^{n+1} | D^- u^{n+1})$$

Stabilité L^2 : méthode d'énergie

- écriture vectorielle du schéma :

$$u^{n+1} - u^n = \sigma D^+ D^- u^{n+1}$$

  avec $\sigma = D\Delta t/\Delta x^2$

- multiplication par u^{n+1} et intégration

$$(u^{n+1} - u^n | u^{n+1}) = \sigma (D^+ D^- u^{n+1} | u^{n+1})$$

- version discrète de $f \times f' = (f^2)'/2$ et intégration par parties discrètes :

$$\frac{1}{2}(\|u^{n+1}\|_2^2 - \|u^n\|_2^2 + \|u^{n+1} - u^n\|_2^2) = -\sigma (D^- u^{n+1} | D^- u^{n+1})$$

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_2^2 &= \|u^n\|_2^2 - \|u^{n+1} - u^n\|_2^2 - 2\sigma \|D^- u^{n+1}\|_2^2 \\ &\leq \|u^n\|_2^2 \end{aligned}$$

Stabilité L^2 : méthode d'énergie

- écriture vectorielle du schéma :

$$u^{n+1} - u^n = \sigma D^+ D^- u^{n+1}$$

avec $\sigma = D\Delta t/\Delta x^2$

- multiplication par u^{n+1} et intégration

$$(u^{n+1} - u^n | u^{n+1}) = \sigma (D^+ D^- u^{n+1} | u^{n+1})$$

- version discrète de $f \times f' = (f^2)'/2$ et intégration par parties discrètes :

$$\frac{1}{2}(\|u^{n+1}\|_2^2 - \|u^n\|_2^2 + \|u^{n+1} - u^n\|_2^2) = -\sigma (D^- u^{n+1} | D^- u^{n+1})$$

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_2^2 &= \|u^n\|_2^2 - \|u^{n+1} - u^n\|_2^2 - 2\sigma \|D^- u^{n+1}\|_2^2 \\ &\leq \|u^n\|_2^2 \end{aligned}$$

- stabilité L^2 inconditionnelle

Problèmes mixtes

- problèmes réels : plusieurs phénomènes couplés
- équation : advection + diffusion + réaction + etc ...
- exemple : écoulement d'un gaz avec réaction chimique

$$\partial_t u + \underbrace{a\partial_x u}_{advection} = \underbrace{D\partial_{xx} u}_{diffusion} + \underbrace{R(u)}_{reaction}$$

- comment résoudre un tel problème ?
  - analyse de l'équation, propriétés de la solution (signe, borne L^∞, L^2)
  - différences finies adaptées à ces propriétés (centrées, décentrées, ordre 1, 2, ou plus, explicite, implicite, etc.)

Méthodes de splitting

- problème mixte (plusieurs phénomènes couplés) :

$$\partial_t u + \underbrace{a\partial_x u}_{advection} = \underbrace{D\partial_{xx} u}_{diffusion} + \underbrace{R(u)}_{reaction}$$

- idée : découper le problème en simulant, au cours d'un même pas de temps, chaque phénomène indépendamment
- exemple :
  - phase d'advection : $\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$
  - phase de diffusion : $\frac{u_i^{**} - u_i^*}{\Delta t} = D\frac{u_{i+1}^* - 2u_i^* - u_{i-1}^*}{\Delta x^2}$
  - phase de réaction : $\frac{u_i^{n+1} - u_i^{**}}{\Delta t} = R(u_i^{**})$

Applications

- diffusion-réaction raide non linéaire
- problème multidimensionnel
- très utile pour le couplage de modèles / codes (problèmes multiphysique)
- exemple : au lieu du schéma couplé

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = D\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + R(u_i^{n+1})$$

(grand système non linéaire), on peut utiliser le splitting suivant :

  - phase d'advection (explicite) : $\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$
  - phase de diffusion (implicite) : $\frac{u_i^{**} - u_i^*}{\Delta t} = D\frac{u_{i+1}^{**} - 2u_i^{**} - u_{i-1}^{**}}{\Delta x^2}$
  - phase de réaction (implicite) : $\frac{u_i^{n+1} - u_i^{**}}{\Delta t} = R(u_i^{n+1})$ (équation non linéaire scalaire)

Justification : cas scalaire (edo) et linéaire

- équation : $y'(t) = ay(t) + by(t)$
- solution (exacte) à Δt :

$$y(\Delta t) = e^{(a+b)\Delta t} y(0)$$

- splitting :
  - phase 1 : solution à Δt de $y'(t) = ay(t)$ (donnée initiale y_0)

$$y^* = e^{a\Delta t} y(0)$$

  - phase 2 : solution à Δt de $y'(t) = by(t)$ (donnée initiale y^*)

$$y^{**} = e^{b\Delta t} y^*$$

- on a alors $y^{**} = e^{b\Delta t} e^{a\Delta t} y(0) = e^{(a+b)\Delta t} y(0) = y(\Delta t)$: solution exacte !

Justification : cas système (EDP) et linéaire

- équation : $y'(t) = Ay(t) + By(t)$,
  $y \in \mathbb{R}^{i_{max}}$ et A, B matrices carrées
- solution (exacte) à Δt : $y(\Delta t) = \exp((A + B)\Delta t)y(0)$
- splitting :
    - phase 1 : solution à Δt de $y'(t) = Ay(t)$ (donnée initiale y_0)
      $$y^* = e^{A\Delta t}y(0)$$
    - phase 2 : solution à Δt de $y'(t) = By(t)$ (donnée initiale y^*)
      $$y^{**} = e^{B\Delta t}y^*$$
- on a alors $y^{**} = e^{B\Delta t}e^{A\Delta t}y(0) \neq e^{(A+B)\Delta t}y(0)$ en général !
- solution exacte si et seulement si A et B commutent
- sinon : erreur d'ordre $O(\Delta t)$

Systèmes hyperboliques pour la propagation d'ondes

- exemple : propagation d'ondes sonores dans l'air
- son $=$ petite perturbation de pression qui se propage dans le gaz au repos
- modèle 1D : (u, p) perturbations de vitesse et de pression, solutions du système

$$\partial_t p + \gamma \bar{p} \partial_x u = 0$$
$$\partial_t u + \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_x p = 0$$

où $\bar{\rho}$ et $\bar{p}$ masse volumique et pression de l'air ambiant, $\gamma = 7/5$

Équation des ondes

- système (pression,vitesse) :

$$\partial_t p + \gamma \bar{p} \partial_x u = 0$$
$$\partial_t u + \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_x p = 0$$

- on dérive l'équation 1 par rapport à t :

$$\partial_{tt} p = -\gamma \bar{p} \partial_t \partial_x u = -\gamma \bar{p} \partial_x \partial_t u = \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} \partial_{xx} p$$

- p est solution de l'équation des ondes :

$$\partial_{tt} p = c^2 \partial_{xx} p$$

  où $c = \sqrt{\gamma \bar{p} / \bar{\rho}}$ est la vitesse du son.
- on peut montrer que si $p(t=0,x) = p_0(x)$ et $\partial_t p(t=0,x) = 0$ alors

$$p(t,x) = \frac{1}{2}(p_0(x-ct) + p_0(x+ct))$$

  et que $\|p(t,.)\|_2 \leq \|p_0\|_2$

Différences finies pour l'équation des ondes

- schéma naturel : différences finies centrées

$$\frac{p_i^{n+1} - 2p_i^n + p_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

- analyse : schéma d'ordre 2 en temps et en espace, L^2 stable sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x / c$ (analyse von Neumann)
- problème : comment faire si les CI et CL sont sur u et p ?
- il peut être plus pertinent de résoudre directement le système (p, u)

Résolution du système (p, u)

- idée : diagonalisation du système

$$\partial_t p + \gamma \bar{p} \partial_x u = 0$$

$$\partial_t u + \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_x p = 0$$

Résolution du système (p, u)

- idée : diagonalisation du système

$$\partial_t p + \gamma \bar{p} \partial_x u = 0$$

$$\partial_t u + \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_x p = 0$$

- on pose $U = \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \bar{p} \\ \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \end{pmatrix}$ et l'on a

$$\partial_t U + A \partial_x U = 0$$

Résolution du système (p, u)

- idée : diagonalisation du système

$$\partial_t p + \gamma \bar{p} \partial_x u = 0$$
$$\partial_t u + \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_x p = 0$$

- on pose $U = \begin{smallmatrix} p \\ u \end{smallmatrix})$ et $A = (\begin{smallmatrix} 0 & \gamma \bar{p} \\ \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \end{smallmatrix})$ et l'on a

$$\partial_t U + A \partial_x U = 0$$

- diagonalisation de A : $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & c/\bar{p} \\ 1 & -c/\bar{p} \end{pmatrix}$$

Résolution du système (p, u)

- idée : diagonalisation du système

$$\partial_t p + \gamma \bar{p} \partial_x u = 0$$
$$\partial_t u + \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_x p = 0$$

- on pose $U = \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\bar{p} \\ \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \end{pmatrix}$ et l'on a

$$\partial_t U + A \partial_x U = 0$$

- diagonalisation de A : $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & c/\bar{p} \\ 1 & -c/\bar{p} \end{pmatrix}$$

- diagonalisation du système

$$\partial_t U + A \partial_x U = 0$$

Résolution du système (p, u)

- idée : diagonalisation du système

$$\partial_t p + \gamma \bar{p} \partial_x u = 0$$
$$\partial_t u + \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_x p = 0$$

- on pose $U = \left(\begin{smallmatrix} p \\ u \end{smallmatrix}\right)$ et $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \gamma\bar{p} \\ \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et l'on a

$$\partial_t U + A \partial_x U = 0$$

- diagonalisation de A : $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & c/\bar{p} \\ 1 & -c/\bar{p} \end{pmatrix}$$

- diagonalisation du système

$$\partial_t PU + PA \partial_x U = 0$$

Résolution du système (p, u)

- idée : diagonalisation du système

$$\partial_t p + \gamma \bar{p} \partial_x u = 0$$
$$\partial_t u + \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_x p = 0$$

- on pose $U = \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \bar{p} \\ \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \end{pmatrix}$ et l'on a

$$\partial_t U + A \partial_x U = 0$$

- diagonalisation de A : $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & c/\bar{p} \\ 1 & -c/\bar{p} \end{pmatrix}$$

- diagonalisation du système

$$\partial_t PU + PAP^{-1} \partial_x PU = 0$$

Résolution du système (p, u)

- idée : diagonalisation du système

$$\partial_t p + \gamma \bar{p} \partial_x u = 0$$
$$\partial_t u + \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_x p = 0$$

- on pose $U = \binom{p}{u}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\bar{p} \\ \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \end{pmatrix}$ et l'on a

$$\partial_t U + A \partial_x U = 0$$

- diagonalisation de A : $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & c/\bar{p} \\ 1 & -c/\bar{p} \end{pmatrix}$$

- diagonalisation du système

$$\partial_t V + D \partial_x V = 0, \text{ avec } V = PU$$

Résolution du système (p, u)

- idée : diagonalisation du système

$$\partial_t p + \gamma \bar{p} \partial_x u = 0$$
$$\partial_t u + \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_x p = 0$$

- on pose $U = \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \bar{p} \\ \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \end{pmatrix}$ et l'on a

$$\partial_t U + A \partial_x U = 0$$

- diagonalisation de A : $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & c/\bar{p} \\ 1 & -c/\bar{p} \end{pmatrix}$$

- diagonalisation du système

$$\partial_t v^{(1)} + c \partial_x v^{(1)} = 0$$
$$\partial_t v^{(2)} - c \partial_x v^{(2)} = 0$$

deux équations d'advection

Résolution du système (p, u)

- solution du système diagonalisé (caractéristiques) :

$$v^{(1)}(t,x) = v^{(1)}(0, x - ct) \text{ et } v^{(2)}(t,x) = v^{(2)}(0, x + ct)$$

- solution du système en (p, u) : revenir dans la base de départ
  ...

Différences finies

- Lax-Wendroff :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + A\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{2}A^2\frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

- décentré :
  - difficile (décentrer dans quelle direction ?)
  - méthode très utilisée en aérodynamique

Différences finies

- Lax-Wendroff :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + A\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{2}A^2\frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

- décentré :
    - difficile (décentrer dans quelle direction ?)
    - décentré : diagonaliser le système, appliquer un schéma décentré à chaque équation, et revenir dans la base de départ
    - méthode très utilisée en aérodynamique

L’an prochain ...

- cours de solveurs linéaires pour les problèmes industriels (R. Turpault, S7) : solveurs creux (LU, Cholesky), solveurs itératifs (CG, BiCGSTAB, GMRES, multigrille). Insispensable pour les schémas implicites ou pour les problèmes stationnaires (Poisson)
- cours MNPI1 (D. Aregba, S7) et MNPI2 (S ; Brull, S8) : méthodes numériques pour les problèmes multidimensionnels (volumes finis et éléments finis)
- NB : toutes ces méthodes se ramènent, dans des cas très simples, aux différences finies
- tous les phénomènes vus en ONM se retrouvent avec ces méthodes