Outils numériques pour la mécanique

Stabilité L^2 des schémas différences finies par la méthode de von Neumann

Luc Mieussens

2019

Schéma différences finies

- équation aux dérivées partielle linéaire, posée dans $[0, 1]$
- conditions aux limites périodiques
- maillage : $x_j = j\Delta x$, $j = 0$ à j_{max}, $\Delta x = 1/j_{max}$
- schéma linéaire, à 3 points, à 1 pas :

$$
\begin{aligned}
&u_j^{n+1} = Au_{j-1}^n + Bu_j^n + Cu_{j+1}^n, \qquad j = 1 : j_{max}\\
&CI : u_j^0 = u_0(x_j),\\
&CL : u_0^n = u_{j_{max}}^n, \quad u_{j_{max}+1}^n = u_1^n.
\end{aligned}
$$

- exemples :
  - équation d'advection, schéma décentré : $A = a\Delta t/\Delta x$, $B = 1 - a\Delta t/\Delta x$, $C = 0$
  - équation de la chaleur, schéma centré : $A = D\Delta t/\Delta x^2$, $B = 1 - 2D\Delta t/\Delta x^2$, $C = a$
- NB : l'analyse qui suit fonctionne encore pour un schéma implicite ou avec un stencil plus large

Stabilité L^2

le schéma est L^2 stable si, quelle que soit la donnée initiale u_0, on a

$$\|u^{n+1}\|_2 \leq \|u^n\|_2,$$

où

$$\|u^n\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{j_{max}} |u_j^n|^2 \Delta x}$$

Base de Fourier discrète

- on considère les j_{max} valeurs u_j^n comme les coordonnées du vecteur u^n dans la base canonique de $\mathbb{C}^{j_{max}}$
- on munit $\mathbb{C}^{j_{max}}$ du produit hermitien

$$(u|v) = \sum_{j=1}^{j_{max}} u_j \bar{v}_j \Delta x$$

- alors les j_{max} vecteurs $\phi^{(1)}, \ldots \phi^{(j_{max})}$ définis par

$$\phi^{(k)} = (\phi_j^{(k)})_{j=1}^{j_{max}}, \quad \phi_j^{(k)} = e^{i2\pi kj\Delta x}$$

forment une *base orthonormée* de $\mathbb{C}^{j_{max}}$

Transformée de Fourier discrète

- notons $\hat{u}_1^n, \ldots, \hat{u}_{j_{max}}^n$ les coordonnées de u^n dans la base de Fourier
- comme c'est une base orthonormée, on a

$$\hat{u}_k^n = (u^n|\phi^{(k)}) = \sum_{j=1}^{j_{max}} u_j^n \bar{\phi}_j^{(k)} \Delta x,$$

d'où

$$\boxed{\hat{u}_k^n = \sum_{j=1}^{j_{max}} u_j^n e^{-i2\pi kj\Delta x} \Delta x}$$

transformée de Fourier discrète de la solution numérique

Modes de Fourier de la solution numérique

- formule d'inversion : la base canonique orthonormée est formée des j_{max} vecteurs $e^{(j)} = (0, \dots, \frac{1}{\Delta x}, 0 \dots, 0)$, d'où

$$u_j^n = (u^n | e^{(j)}) = \sum_{k=1}^{j_{max}} \hat{u}_k^n \, (\phi^{(k)} | e^{(j)}) = \sum_{k=1}^{j_{max}} \hat{u}_k^n \phi_j^{(k)},$$

d'où

$$\boxed{u_j^n = \sum_{k=1}^{j_{max}} \hat{u}_k^n e^{i2\pi kj\Delta x}}$$

- $\hat{u}_k^n e^{i2\pi kj\Delta x}$ est le k^{e} mode de la valeur numérique u_j^n
- équivalent en dimension finie de la notion de série de Fourier

$$u(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_k e^{i2\pi kx}$$

Norme L^2 et égalité de Parceval

- norme L^2 dans la base canonique :

$$\|u^n\|_2^2 = (u^n|u^n) = \sum_{j=1}^{j_{max}} |u_j^n|^2 \Delta x$$

- norme L^2 dans la base de Fourier :

$$\|u^n\|_2^2 = (u^n|u^n) = \sum_{k=1}^{j_{max}} |\hat{u}_k^n|^2 \Delta x$$

- égalité de Parceval :

$$\|u^n\|_2^2 = (u^n|u^n) = \boxed{\sum_{j=1}^{j_{max}} |u_j^n|^2 \Delta x = \sum_{k=1}^{j_{max}} |\hat{u}_k^n|^2 \Delta x}$$

Écriture du schéma dans la base de Fourier discrète

- schéma :

$$u_j^{n+1} = Au_{j-1}^n + Bu_j^n + Cu_{j+1}^n,$$

- transformée de Fourier discrète :

$$\hat{u}_k^n = \sum_{j=1}^{j_{max}} u_j^n e^{-i2\pi kj\Delta x} \Delta x$$

- on multiplie le schéma par $e^{-i2\pi kj\Delta x}$ et on somme sur j :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{j_{max}} u_j^{n+1} e^{-i2\pi kj\Delta x} \Delta x = {} & A \sum_{j=1}^{j_{max}} u_{j-1}^n e^{-i2\pi kj\Delta x} \Delta x \\
& + B \sum_{j=1}^{j_{max}} u_j^n e^{-i2\pi kj\Delta x} \Delta x \\
& + C \sum_{j=1}^{j_{max}} u_{j+1}^n e^{-i2\pi kj\Delta x} \Delta x
\end{aligned}$$

Écriture du schéma dans la base de Fourier discrète

- schéma :

$$u_j^{n+1} = Au_{j-1}^n + Bu_j^n + Cu_{j+1}^n,$$

- transformée de Fourier discrète :

$$\hat{u}_k^n = \sum_{j=1}^{j_{max}} u_j^n e^{-i2\pi kj\Delta x}\Delta x$$

- on multiplie le schéma par $e^{-i2\pi kj\Delta x}$ et on somme sur j :

$$\begin{aligned}\hat{u}_k^{n+1} = {} & A\sum_{j=1}^{j_{max}} u_{j-1}^n e^{-i2\pi kj\Delta x}\Delta x \\ & + B\hat{u}_k^n \\ & + C\sum_{j=1}^{j_{max}} u_{j+1}^n e^{-i2\pi kj\Delta x}\Delta x\end{aligned}$$

Écriture du schéma dans la base de Fourier discrète

- changement d'indice pour les deux autres termes :

$$\sum_{j=1}^{j_{max}} u_{j-1}^n e^{-i2\pi kj\Delta x}\Delta x = \sum_{j=0}^{j_{max}-1} u_j^n e^{-i2\pi k(j+1)\Delta x}\Delta x$$

$$= e^{-i2\pi k\Delta x}\sum_{j=0}^{j_{max}-1} u_j^n e^{-i2\pi kj\Delta x}\Delta x = e^{-i2\pi k\Delta x}\sum_{j=1}^{j_{max}} u_j^n e^{-i2\pi kj\Delta x}\Delta x$$

$$= e^{-i2\pi k\Delta x}\hat{u}_k^n,$$

car par définition $u_0^n = u_{j_{max}}^n$, et on a aussi $e^{-i2\pi k\times 0\Delta x} = 1 = e^{-i2\pi k\times j_{max}\Delta x}$ car $\Delta x = 1/j_{max}$

- de même on trouve :

$$\sum_{j=1}^{j_{max}} u_{j-1}^n e^{-i2\pi kj\Delta x}\Delta x = e^{i2\pi k\Delta x}\hat{u}_k^n$$

Écriture du schéma dans la base de Fourier discrète

- d'où :

$$\hat{u}_k^{n+1} = \underbrace{\left(Ae^{-i2\pi k\Delta x} + B + Ce^{i2\pi k\Delta x}\right)}_{\rho_k} \hat{u}_k^n$$

- ρ_k facteur d'amplification du k^{e}mode
- interprétation : la transformée de Fourier discrète « diagonalise » le schéma :

$$u_j^{n+1} \text{ dépend de } u_{j-1}^n,\ u_j^n, \text{ et } u_{j+1}^n$$
$$\Downarrow$$
$$\hat{u}_k^{n+1} \text{ dépend seulement de } \hat{u}_k^n$$

- analogue continu : la transformée de Fourier continue "diagonalise" les EDP linéaires (transformation en EDO)

Application à la stabilité L^2

- schéma dans la base de Fourier discrète :

$$\hat{u}_k^{n+1} = \rho_k \hat{u}_k^n$$

- égalité de Parceval :

$$\|u^{n+1}\|_2^2 = \sum_{k=1}^{j_{max}} |\hat{u}_k^{n+1}|^2 \Delta x = \sum_{k=1}^{j_{max}} |\rho_k|^2 |\hat{u}_k^n|^2 \Delta x$$

- il suffit donc que $|\rho_k| \leq 1$ pour tout k pour que

$$\|u^{n+1}\|_2^2 \leq \sum_{k=1}^{j_{max}} |\hat{u}_k^n|^2 \Delta x = \|u^n\|_2^2,$$

stabilité L^2 du schéma

- réciproquement : s'il existe k tel que $|\rho_k| > 1$, alors le mode correspondant est d'amplitude croissante ($\hat{u}_k^n = \rho_k^n \hat{u}_k^0$), et on peut trouver une donnée initiale telle que la norme L^2 soit croissante.

Lien avec la méthode de von Neumann

- on suppose u_j^n composée d'un seul mode :

$$u_j^n = \hat{u}_k^n e^{i2\pi kj\Delta x}$$

noté $\hat{u}^n e^{ij\xi}$, avec $\xi = 2\pi k\Delta x$

- alors on injecte dans le schéma pour trouver

$$\hat{u}^{n+1} e^{ij\xi} = A\hat{u}^n e^{i(j-1)\xi} + B\hat{u}^n e^{ij\xi} + C\hat{u}^n e^{i(j+1)\xi}$$

$\Leftrightarrow$

$$\hat{u}^{n+1} = \underbrace{\left(Ae^{-i\xi} + B + Ce^{i\xi}\right)}_{\rho} \hat{u}^n$$

- on retrouve le facteur d'amplification précédent
- donc si l'on montre que $|\rho| \leq 1$ pour tout ξ, alors l'analyse précédent implique $|\rho_k| \leq 1$ pour tout k et on assure ainsi la L^2 stabilité
- on peut donc se contenter de cette « recette » pour étudier la L^2 stabilité du schéma