Outils Numériques pour la Mécanique

Luc Mieussens

Janvier 2022

Objectifs

- une introduction à la simulation numérique
- problèmes issus de la mécanique (fluide, structure, thermique)
- phénomènes modélisés par des équations aux dérivées partielles
- équations résolues par des méthodes d'approximation numérique :

$$\text{algorithme} \rightarrow \text{programme} \rightarrow \text{simulation}$$

Les EDP en mécanique

edo : équation différentielle ordinaire

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

solution :

$$y : t \mapsto y(t)$$

fonction d'une variable

EDP : Équation aux Dérivées Partielles

$$\frac{\partial T}{\partial t} + a\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

solution :

$$T : (t, x, y, z) \mapsto T(t, x, y, z)$$

fonction de plusieurs variables

thermique : évolution de la chaleur dans un domaine solide

équation de la chaleur dans $\Omega \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T$$

où $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ (laplacien)

- on prescrit une donnée initiale : température initiale

$$T(t = 0, x, y, z) = T_0(x, y, z)$$

- et des données au bord (ou conditions aux limites) : température aux bords de Ω

$$T(t, x, y, z) = T_b$$

pour $(x, y, z) \in \partial\Omega$

Les EDP en mécanique

structure : propagation d'une déformation dans une structure Ω (corde, membrane, etc.)

équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

- on prescrit deux données initiales : déplacement et vitesse de déplacement à $t = 0$

$$u(t = 0, x) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t = 0, x) = v_0(x)$$

- et des données au bord : déplacement aux bords de Ω (bords encastrés ou libres)

$$u(t, x) = u_b$$

pour $x \in \partial\Omega$

Les EDP en mécanique

structure : petites déformations d'un solide élastique (élasticité linéaire)

système de Lamé

$$-\mu\Delta u - (\mu + \lambda)u\Delta(\nabla \cdot u) = f$$

où u est le champ de déplacement et f est une force.

- équation stationnaire
- on prescrit des données au bord : bords encastrés

$$u(x) = 0$$

pour $x \in \partial\Omega$

Les EDP en mécanique

mécanique des fluides : fluide compressible décrit par sa masse volumique ρ, sa vitesse u, et sa pression p

système des équations de Navier-Stokes

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho u = 0 \\
&\partial_t \rho u + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p = \nabla \cdot \sigma \\
&\partial_t E + \nabla \cdot (E + p) u = \nabla \cdot q + \nabla \cdot \sigma u
\end{aligned}
$$

où σ est le tenseur des contraintes de cisaillement, q est le flux de chaleur

- grand nombre de systèmes réduits (Navier-Stokes incompressible, Stokes, Euler, Saint-Venant, etc.)

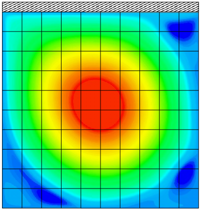
Méthodes Numériques

- Principe : remplacer un problème continu (dimension infinie) par un problème discret (dimension finie)

- Trois grandes classes de méthodes :
  - Différences finies
  - Volumes finis
  - Éléments finis

Différences finies

- Le domaine de calcul est approché par une grille cartésienne



(source : C.-H. Bruneau)

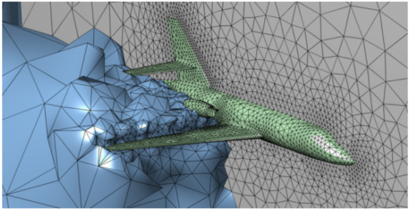
- Les dérivées partielles sont approchées par différences divisées :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(t, x+h, y) - u(t, x, y)}{h}$$

- Extension des méthodes pour les edo
- Avantage : très simple
- Inconvénient : limitée à des géométries simples

Volumes finis

- Le domaine de calcul est découpé en volumes de contrôles (polygones, polyèdres)

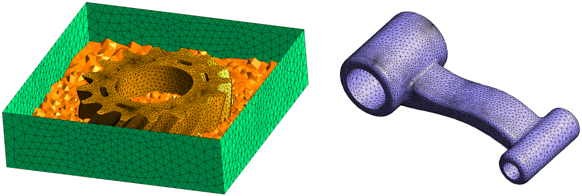


(source de l'image)

- La forme intégrale de l'EDP est utilisée sur chaque volume de contrôle
- Avantage : géométries complexes, approche naturelle en mécanique des fluides
- Inconvénients : moins évidente à appliquer dans d'autres domaines

Éléments finis

- Même maillage que pour les volumes finis
- La solution est approchée par des fonctions polynomiales par morceaux (interpolation)
- Avantage : précision arbitrairement élevée
- Inconvénient : certains problèmes de stabilité
- Méthode reine en mécanique des structures

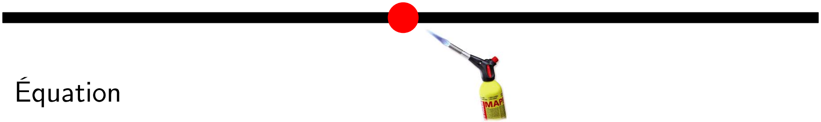


(source : C. Dobrzynski)

Méthodes numériques

- Éléments finis : S7 (méca.) et S8 (maths)
- Volumes finis : S7
- Différences finies : objet de ce cours
  - ▷ permet d'aborder simplement les notions de base de l'approximation numérique
  - ▷ restriction : EDP linéaires (diffusion et advection)
  - ▷ on utilisera des problème simples (de solutions exactes connues) pour analyser le comportement des méthodes numériques

Exemple : équation de la chaleur



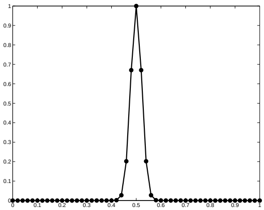
- Équation

$$\partial_t T = \kappa \partial_{xx} T$$
$$T(0,x) = T_0(x)$$

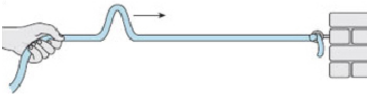
- Approximation (schéma numérique)

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \kappa \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

- Programme
- Simulation



- Équation

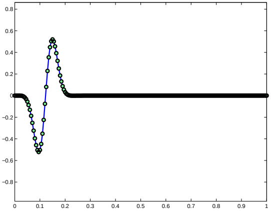


$$\partial_t u + a\partial_x u = 0,$$
$$u(0,x) = u_0(x)$$

- Approximation (schéma numérique)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

- Programme
- Simulation



Exemples : équations de Navier-Stokes

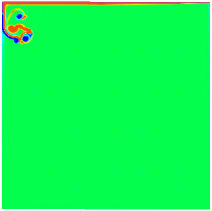
- Équation

$$\nabla \cdot u = 0$$
$$\rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) + \nabla p = \mu \Delta u + \rho g$$

- Schéma numérique (éléments) :

$$\nabla \cdot u(x_i, y_j) \approx \frac{u_{x,i+\frac{1}{2},j} - u_{x,i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{u_{y,i,j+\frac{1}{2}} - u_{y,i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

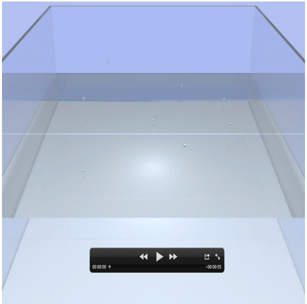
- Programme
- Simulation (cavité entraînée)



(source : C.-H. Bruneau)

Exemples : équations de Navier-Stokes diphasiques

- Interaction air/vague
- Un seul modèle pour les deux fluides
- Capture de l'interface air/eau
- Code Notus (I2M, dont M. Coquerelle et A. Lemoine)



(source : M. Coquerelle)

Exemples : équations de Navier-Stokes diphasiques

- Code Nascar (IMB, M. Bergmann, A. Iollo, L. Weynans)

source : M. Bergmann

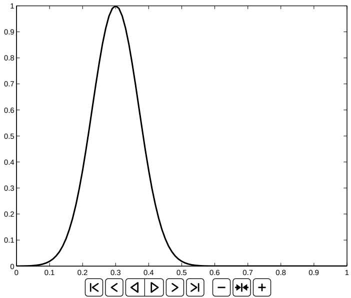
Mise en garde

- Une "solution" numérique n'est pas la réalité
- La réalité est modélisée (donc modifiée et simplifiée)
- La solution du modèle est approchée par la solution numérique
- Artefacts numériques : instabilités, diffusion, dispersion, etc.

Artefacts numériques

- Équation d'advection
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
- Solution exacte : donnée initiale advectée à la vitesse a
$$u(t,x) = u_0(x - at)$$
- Solution numérique donnée par différents schémas

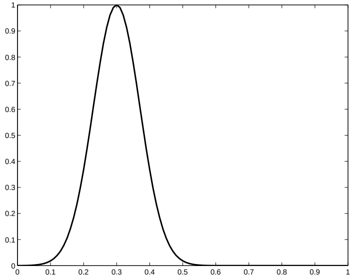
- Solution exacte



Artefacts numériques

- Schéma décentré :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

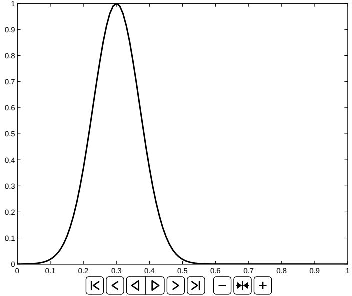


diffusion numérique

Artefacts numériques

- Schéma décentré, pas de temps plus grand :

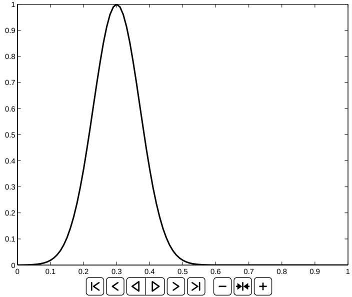
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$



Artefacts numériques

- Schéma décentré, pas de temps plus grand :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

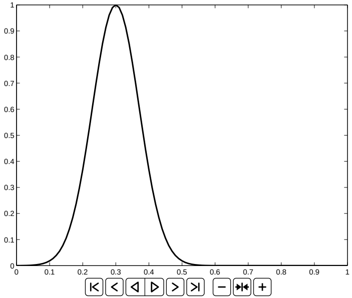


instabilité numérique

Artefacts numériques

- Schéma de Lax-Wendroff :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - a^2\Delta t\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\Delta x^2} = 0$$

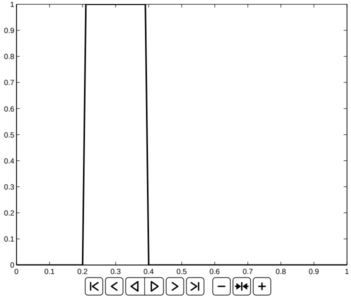


bonne précision

Artefacts numériques

- Schéma de Lax-Wendroff (autre donnée initiale)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - a^2\Delta t\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\Delta x^2} = 0$$



dispersion numérique

Comment bien utiliser une méthode numérique ?

- Bien connaître le problème physique et le modèle utilisé :
  - ▷ De quoi tient compte le modèle ?
  - ▷ De quoi ne tient-il pas compte ?
  - ▷ Limites de validité
- Bien connaître les propriétés qualitatives de l'EDP (positivité, conservation, dissipation, etc.)
- Connaître les propriétés de la méthode numérique, ses avantages et inconvénients
- Pour un développeur : bien programmer (et donc bien débugger)

Des célébrités (anciennes et contemporaines)

- Joseph Fourier (1768-1830)
- John Von Neumann (1903-1957)
- Peter Lax (1926-)
- B. Wendroff (1930-)

Organisation du cours

- 2 séances de cours de 2h + 11 séances d'1h20
- 18 séances de TD (1h20)
- 5 séances de TP de 4h (PG118)
  but : approfondir la connaissance de F90, et programmer les méthodes numériques du cours
- évaluation : cours/TD
  - ▷ un DM donné les 05/04 (travail individuel, complémentaire avec le TP)
  - ▷ un examen final (2h)
- évaluation : TP
  - ▷ TP 1-2-3-4 évalués : 4 notes sur 20
  - TP1 : fiche à rendre
  - TP2 : rapport et programmes à rendre (versions 1 et 2 *entre 1 et 3 semaines après le TP*)
  - TP3 et TP4 : rapport et programmes (une version)
  - absence non justifiée ou rapport non remis : 0/20
  - note d'assiduité : 5 points
  - note finale : assiduité + moyenne(TP1, TP2, TP3, TP4)
- sites web du cours :
- moodle
  `https://moodle.bordeaux-inp.fr/course/view.php?id=1946&section=0`
- ma page web :
  `http://www.math.u-bordeaux.fr/~lmieusse/PAGE_WEB/enseignement.html`

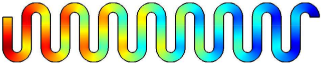
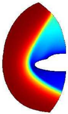
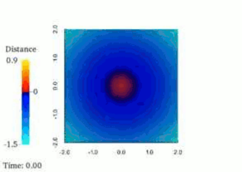
Enseignants

- Ce sont tous des spécialistes en méthodes numériques
- Ils utilisent ces méthodes et en développent de nouvelles dans leurs travaux de recherche à l'institut de mathématiques de Bordeaux ou à l'institut de mécanique et d'ingénierie
- Ils développent des logiciels de simulation numérique

Enseignants

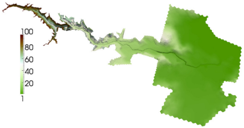
Luc Mieussens

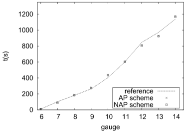
- Simulation numérique pour le transport de particules (gaz, gouttes, etc.)
- Conseiller scientifique au Commissariat à l'Energie Atomique
- Directeur Scientifique du Mésocentre de Calcul Intensif Aquitain (MCIA : `https://www.mcia.fr`)
- Applications : aérodynamique (rentrée atmosphérique), océanographie (pluie, embruns)
- Page web : `http://www.math.u-bordeaux.fr/~lmieusse`

Rodolphe Turpault

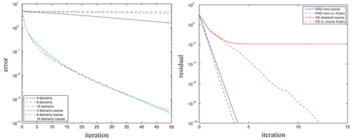
- Méthodes numériques pour la résolution d'EDP
- Applications : mécanique des fluides, rentrée atmosphérique, cardiologie
- Page web : `https://www.math.u-bordeaux.fr/~rturpault/`





Kevin Santugini

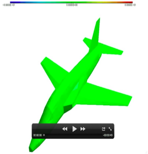
- solveurs linéaires
- électromagnétisme
- Page web : `https://www.math.u-bordeaux.fr/~ksantugi/`

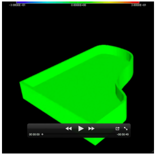


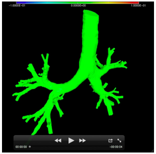
Enseignants

Marc Duruflé

- Méthodes numériques pour la propagation d'ondes
- Applications : calcul d'émission d'ondes radar (aviation) et d'ondes acoustiques
- Page web : `http://www.math.u-bordeaux.fr/~durufle/`







Enseignants

Martin Parisot

- Méthodes numériques pour la mécanique des fluides
- Page web : `https://team.inria.fr/cardamom/martin-parisot/`

Enseignants

Oumayma Bouhamama

- Méthodes numériques pour la cardiologie
- Page web : `https://team.inria.fr/carmen/`

Bibliographie

- Référence principale :

`Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems (Randall J. LeVeque) Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2007`

Exemplaires à la bibliothèque EMMK, à la BU
Versions antérieures à la publication téléchargeables sur le web

Bibliographie

- Livre de référence (en anglais) :

  `Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations`
  `(John C. Strikwerda)`
  `Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004`

- Excellent livre en français :

  `Analyse numérique et optimisation`
  `(Grégoire Allaire)`
  `Éditions de l'École Polytechnique`
  `2ème édition (revue et corrigée) en 2012`

  Chapitres 1 et 2 à lire absolument !!