

Introduction à la méthode des volumes finis

Chapitre 1 : EDP et lois de conservation

Luc Mieussens

Septembre 2026

Équations aux Dérivées Partielles

► EDP

$$\partial_t T = \nabla \cdot (D \nabla T)$$

$$\text{où } T = T(t, x, y)$$

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0$$

$$\text{où } u = T(t, x)$$

$$\Delta \varphi = 0$$

$$\text{où } \varphi = \varphi(x, y, z)$$

↳ ces équations permettent de modéliser un grand nombre de phénomènes physiques

► Notations :

► vecteur gradient : $f = f(x, y)$ $\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix}$

► divergence : $u = \begin{pmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{pmatrix}$ $\nabla \cdot u = \partial_x u_x + \partial_y u_y$

► autres opérateurs différentiels : rotationnel, laplacien, etc. voir les cours de 1ère année

EDP : classification

3 types rencontrés fréquemment :

- ▶ elliptique
- ▶ parabolique
- ▶ hyperbolique

EDP : type elliptique

- ▶ Exemple type : équation de Poisson

$$-\Delta\phi = S$$

d'inconnue $\phi(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ et de donnée S

- ▶ Caractéristiques
 - ▶ principe du maximum : $S > 0 \Rightarrow \phi > 0$
 - ▶ régularisation : ϕ est plus régulière que S
- ▶ Applications :
électrostatique, élasticité, thermique, mécanique de fluides, mécanique quantique, etc. (en général pour des problèmes stationnaires)

EDP : type parabolique

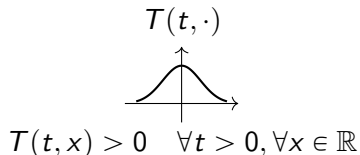
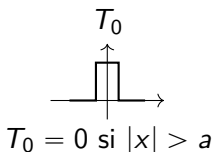
- ▶ Exemple type : équation de la chaleur

$$\partial_t T = \nabla \cdot (D \nabla T)$$

$$T(t=0, x) = T_0(x)$$

- ▶ Caractéristiques :

- ▶ régularisation : $T(t, \cdot)$ plus régulière que T_0
- ▶ propagation à vitesse infinie



- ▶ Applications : processus de diffusion chaleur (loi de Fourier), espèces chimiques (loi de Fick), friction dans un fluide (viscosité)

EDP : type hyperbolique

- ▶ Exemple type : équation d'advection

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0$$

$$u(t = 0, x) = u_0(x)$$

- ▶ Caractéristiques

- ▶ propagation à vitesse finie
- ▶ pas de régularisation : $u(t, \cdot)$ a la même régularité que u_0

- ▶ Applications : propagation d'ondes

- ▶ acoustique
- ▶ électrodynamique
- ▶ électromagnétisme
- ▶ dynamique des gaz

EDP : insuffisance de la classification

- ▶ cette classification ne permet de distinguer qu'un petit nombre d'EDP importantes
- ▶ toutes les EDP ne peuvent pas être classées dans l'un ou l'autre type

Lois de conservation

- ▶ Définition

- ▶ EDP qui décrit l'évolution d'une quantité, d'une substance, globalement conservée au cours du temps (pas de création, ni disparition)
- ▶ exemples : masse, énergie, nombre de mol., quantité de mouvement, etc.

- ▶ Forme générale

$$\partial_t q + \nabla \cdot F = 0$$

où

q : densité

F : vecteur de flux

Lois de conservation : forme générale

- ▶ Densité
 - ▶ q : mesure la quantité d'une certaine substance S
 - ▶ unités : unité de S par unité de volume, de surface, ou de longueur (en 3D, 2D, 1D, respectivement)
 - ▶ exemples : densité de masse, densité d'énergie, etc.
 - ▶ notations : $t > 0$ est le temps, $x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$ est la variable de position dans l'espace ($d = 1, 2, 3$)
- ▶ Vecteur de flux
 - ▶ $F = (F_i)_{i=1}^d$
 - ▶ unités : $[S][t]^{-1}[x]^{1-d}$
 - ▶ 1D : $[S][t]^{-1}$ "[S] par seconde"
 - ▶ 2D : $[S][t]^{-1}[x]^{-1}$ "[S] par mètre, par seconde"
 - ▶ 3D : $[S][t]^{-1}[x]^{-2}$ "[S] par mètre carré, par seconde"
 - ▶ F est une fonction de q ou de ses gradients

Toute la modélisation du problème physique se fait par la définition de F

Lois de conservation : lois linéaires

- ▶ Loi linéaire $F = F(q)$ est une fonction linéaire de q
- ▶ Exemple 1 : conservation de la masse dans un fluide animé de la vitesse u
 - ▶ $q = \rho$ (densité de masse), $F = \rho u$ (fonction linéaire de ρ) = q/u
 - ▶ équation :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

- ▶ Exemple 2 : loi de conservation de l'énergie thermique
 - ▶ $q = e = \rho c T$ (densité volumique d'énergie thermique)
 - ▶ $F = -\kappa \nabla T$ (loi de Fourier) = $-\kappa \nabla \left(\frac{q}{\rho c} \right)$
 - ▶ équation :

$$\partial_t e + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) = 0$$

- ▶ coefficients : ρ masse volumique du matériau, c capacité thermique massique, κ conductivité thermique
- ▶ ici F dépend de ∇q et non pas directement de q

Lois de conservation : lois linéaires

- ▶ Exemple 3 : équation de la chaleur
 - ▶ si ρ et c sont constants, on obtient

$$\partial_t T = \nabla \cdot (D \nabla T)$$

- ▶ où $D = \frac{\kappa}{\rho c}$ est la diffusivité thermique
- ▶ Attention
 - ▶ d'un point de vue mathématique, cette dernière équation est aussi une loi de conservation
 - ▶ mais physiquement parler de conservation globale de T n'a pas de sens (ce n'est pas une variable extensive).

Lois de conservation : lois linéaires

- ▶ Exemple 4 : propagation d'une substance miscible dans un fluide
 - ▶ exemple : lait dans du café
 - ▶ advection + diffusion
 - ▶ $q = \rho c$, où c est la fraction massique de lait, et ρ la masse volumique des deux fluides, supposée constante
 - ▶ flux :

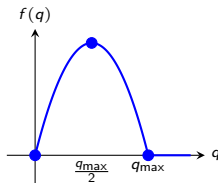
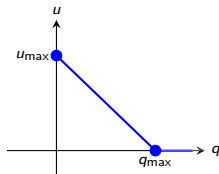
$$F = \underbrace{u\rho c}_{\text{advection}} - \underbrace{\rho D \nabla c}_{\text{diffusion}}$$

- ▶ équation :

$$\partial_t(\rho c) + \nabla \cdot (\rho u c) = \nabla \cdot (\rho D \nabla c)$$

Lois de conservation : lois non linéaires

- ▶ Loi non linéaire : $F = F(q)$ est une fonction non linéaire de q
- ▶ Exemple : le modèle 1D du trafic routier
 - ▶ q : nombre de voitures par km (densité linéique de voitures)
 - ▶ flux : $F(q) = u(q)q$ avec $u(q)$ vitesse des voitures à la densité q
 - ▶ modèle de plus simple : $u(q) = u_{max}(1 - \frac{q}{q_{max}})$



- ▶ la vitesse tend vers 0 si q atteint q_{max}
- ▶ la vitesse est d'autant plus grande que q est faible
- ▶ la vitesse est limitée à u_{max}
- ▶ équation :

$$\partial_t q + \partial_x (u(q)q) = 0$$

(cf chapitre 6)

Lois de conservation : système de lois de conservation

- Exemple : équations d'Euler (dynamique gaz compressible)

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (\text{masse})$$

$$\partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p = 0 \quad (\text{quantité de mouvement})$$

$$\partial_t(\rho e) + \nabla \cdot ((\rho e + p)u) = 0 \quad (\text{énergie})$$

avec $p = p(\rho, e)$ (loi d'état)

Lois de conservation avec terme source

- ▶ Définition

- ▶ le modèle tient compte de la création ou de la disparition de substance mesurée par q
- ▶ équation :

$$\partial_t q + \nabla \cdot F(q) = R(q)$$

- ▶ terme source : $R(q)$ est le taux de production/perte de q (unités $[S][t]^{-1}$)

- ▶ Attention

- ▶ ce n'est pas une loi de conservation
- ▶ toutes les méthodes numériques vues dans ce cours peuvent tout de même être utilisées
- ▶ il existe des méthodes spécifiques qui sont parfois préférables

Lois de conservation avec terme source

- ▶ Exemple 1 : écoulement réactif

- ▶ advection de deux espèces chimiques à la vitesse a , avec la réaction $A \rightarrow B$ qui se produit sur un temps caractéristique τ
- ▶ système d'équations :

$$\partial_t q_A + a \partial_x q_A = -\frac{1}{\tau} q_A, \quad \partial_t q_B + a \partial_x q_B = \frac{1}{\tau} q_A$$

- ▶ Exercice : vérifiez que la quantité totale $q = q_A + q_B$ satisfait une vraie loi de conservation : $\partial_t q + a \partial_x q = 0$

- ▶ Exemple (2) : écoulement avec gravité

- ▶ équation :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

$$\partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p = \rho g$$

- ▶ terme source : ρg accélération due à la gravité (fait augmenter ou diminuer ρu)

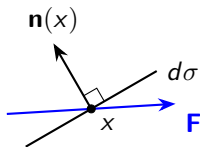
Flux et conservation

- ▶ D'où vient la forme générale $\partial_t q + \nabla \cdot F = 0$?
- ▶ Construction en 3 étapes :
 1. définition précise du vecteur flux F
 2. principe de conservation
 3. formule de la divergence

Flux et conservation : 1. Vecteur flux

- ▶ Définition 3D ou 2D

- ▶ soit $d\sigma$ un élément de surface (longueur) centré en x , de normale unitaire $n(x)$



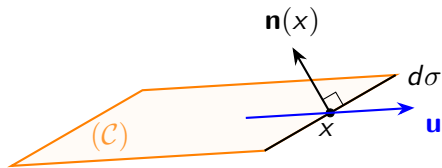
- ▶ le vecteur flux $F(t, x)$ est tel que la quantité de substance mesurée par q qui traverse $d\sigma$ pendant dt est

$$F(t, x) \cdot n(x) d\sigma dt$$

- ▶ Définition en 1D

- ▶ en 1D, on considère le flux à travers un point
 - ▶ le flux (scalaire) F est tel que la quantité de substance qui passe par x pendant dt est $F(t, x)dt$

Flux et conservation : exemple du vecteur flux de masse $F = \rho u$



- ▶ par définition : la quantité de masse qui traverse $d\sigma$ pendant dt est

$$F \cdot n d\sigma dt = \rho \underbrace{(u \cdot n) dt d\sigma}_{\text{volume du cylindre } \mathcal{C}}$$

- ▶ cette quantité est la masse contenue dans le cylindre $\mathcal{C}$, de base $d\sigma$ et engendré par u
- ▶ c'est cette masse qui va traverser $d\sigma$ pendant dt

Flux et conservation : 2. Principe de conservation

- ▶ soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3)
- ▶ la quantité totale de substance au temps t dans Ω est

$$Q(t) = \int_{\Omega} q(t, x) dx$$

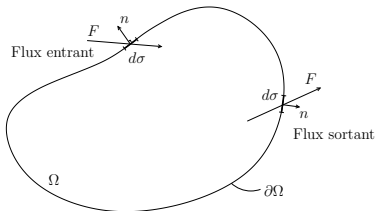
- ▶ la variation de cette quantité totale pendant dt est :

$$dQ = Q(t + dt) - Q(t) \tag{1}$$

$$= \int_{\Omega} q(t + dt, x) dx - \int_{\Omega} q(t, x) dx \tag{2}$$

Flux et conservation : 2. Principe de conservation

Le principe de conservation stipule que cette variation n'est due qu'à l'apport ou à la perte de substance par les bords de Ω (notés $\partial\Omega$) :



par définition, la quantité de substance qui traverse un petit élément $d\sigma$ de la surface $\partial\Omega$ pendant dt est $F(t, x) \cdot n(x) d\sigma dt$

- ▶ si $F(t, x) \cdot n(x) < 0$ cette quantité entre dans Ω
 $\Rightarrow$ la quantité de substance correspondante est donc $-F(t, x) \cdot n(x) d\sigma dt$ (signe - car $F \cdot n < 0$)
- ▶ si $F(t, x) \cdot n(x) > 0$ cette quantité sort de Ω
 $\Rightarrow$ la quantité de substance correspondante est donc $+F(t, x) \cdot n(x) d\sigma dt$ (signe + car $F \cdot n > 0$)

Flux et conservation : 2. principe de conservation

- ▶ la quantité de substance qui entre dans Ω pendant dt est donc

$$Q_e = \left(\int_{x \in \partial\Omega, F \cdot n < 0} -F(t, x) \cdot n(x) d\sigma \right) dt$$

- ▶ celle qui sort de Ω pendant dt est donc

$$Q_s = \left(\int_{x \in \partial\Omega, F \cdot n > 0} F(t, x) \cdot n(x) d\sigma \right) dt$$

- ▶ la variation de Q est donc :

$$Q(t + dt) - Q(t) = Q_e - Q_s$$

$\Downarrow$

$$\int_{\Omega} q(t + dt, x) dx - \int_{\Omega} q(t, x) dx = - \left(\int_{\partial\Omega} F(t, x) \cdot n(x) d\sigma \right) dt$$

 (0)

Flux et conservation : 2. principe de conservation

Formulation intégrale n°1 de la loi de conservation :

↳ en sommant sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, on aboutit à la variation de Q entre t_1 et t_2 :

$$\boxed{\int_{\Omega} q(t_2, x) dx - \int_{\Omega} q(t_1, x) dx = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\partial\Omega} F(t, x) \cdot n(x) d\sigma \right) dt} \quad (1)$$

Flux et conservation : 3. formule de la divergence

- Revenons à la formulation (0) : en la divisant par dt et en faisant tendre dt vers 0, on trouve :

$$\int_{\Omega} \partial_t q(t, x) dx = - \int_{\partial\Omega} F(t, x) \cdot n(x) d\sigma$$

- on ré-écrit l'intégrale surfacique sous une forme volumique avec la formule de la divergence :

$$\int_{\partial\Omega} F(t, x) \cdot n(x) d\sigma = \int_{\Omega} \nabla \cdot F(t, x) dx$$

- et l'on trouve la formulation intégrale n°2 de la loi de conservation

$$\boxed{\int_{\Omega} (\partial_t q + \nabla \cdot F)(t, x) dx = 0} \quad (2)$$

Flux et conservation : 3. formule de la divergence

- ▶ la formulation intégrale n°2 est vraie pour tout ouvert Ω
- ▶ des arguments d'analyse fonctionnelle permettent alors de montrer que l'intégrande est nécessairement nulle :

$$\boxed{\partial_t q + \nabla \cdot F = 0} \quad \forall t, \forall x \in \mathbb{R}^3$$

c'est la formulation locale de la loi de conservation

Remarques et interprétations

- ▶ La méthode des volumes finis consiste à faire le chemin inverse (de la version locale à la version intégrale d'une même équation).
- ▶ Cette interprétation nous sera utile lorsque nous aborderons la notion de solution faible (ou solution non dérivable).
- ▶ Exercice : refaire cette construction dans le cas 1D ($d = 1$)
 - ↳ attention, dans ce cas Ω est un intervalle, $\partial\Omega$ n'est constitué que de deux points, et l'on n'a pas besoin de la formule de la divergence

Formules de Gauss à connaître absolument

- Formule de base :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de bord $\partial\Omega$:

$$\boxed{\int_{\Omega} \partial_{x_i} f(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} f(x) n_i(x) \, d\sigma}$$

où $d\sigma$ est la mesure de bord de $\partial\Omega$ (petit élément de bord en physique) et n_i est la i ème composante de la normale n , dirigée vers l'extérieur de Ω

- NB : cette formule est l'extension multidimensionnelle de la formule

$$\int_a^b \phi'(x) \, dx = \phi(b) - \phi(a)$$

Formule de Gauss : corollaires

- Formule du gradient : soit f une fonction scalaire

$$\int_{\Omega} \nabla f(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} f(x) n(x) \, d\sigma$$

- Formule de la divergence : soit u une fonction vectorielle

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot u(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} u(x) \cdot n(x) \, d\sigma$$

- Intégration par parties multidimensionnelle

$$\int_{\Omega} (\partial_{x_i} f(x)) g(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) n_i(x) \, d\sigma - \int_{\Omega} f(x) \partial_{x_i} g(x) \, dx$$

c'est l'extension de l'IPP usuelle en 1D :

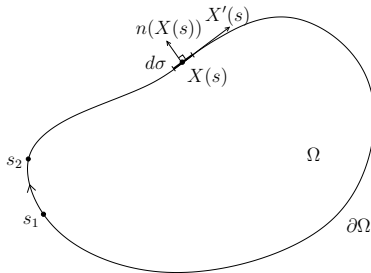
$$\int_a^b f'(x) g(x) \, dx = \left(f(b) g(b) - f(a) g(a) \right) - \int_a^b f(x) g'(x) \, dx$$

Formules de Gauss : calcul de $d\sigma$ et n dans le cas 2D

si $\partial\Omega$ est paramétré par:

$$[a, b] \rightarrow \partial\Omega$$

$$s \mapsto X(s) = (x(s), y(s))$$



alors

- la mesure de $\partial\Omega$ est $d\sigma = \|X'(s)\| ds$
- la normale unitaire sortante est obtenue par rotation de $\pm\pi/2$ puis normalisation de $X'(s)$: pour la figure ci-dessus

$$n(X(s)) = \frac{1}{\|X'(s)\|} \begin{pmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix}$$

- et l'intégrale curviligne sur $\partial\Omega$ peut se calculer par la formule

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(x) d\sigma = \int_a^b \varphi(X(s)) \|X'(s)\| ds$$

NB : le résultat est indépendant de la paramétrisation choisie