

Introduction à la méthode des volumes finis

Chapitre 2 : Présentation générale de la méthode des volumes finis

Luc Mieussens

Septembre 2026

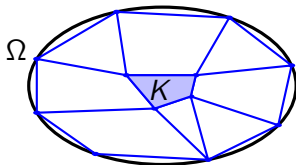
Éléments de base de la méthode : maillage

- ▶ On considère la loi de conservation

$$\partial_t q + \nabla \cdot F = 0 \quad (1)$$

posée dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) :

- ▶ On découpe Ω en morceaux : c'est le *maillage*. Chaque morceau (noté ici K) est une maille (ou « cellule »).
- ▶ En général les mailles sont des segments (1D), des polygones (2D) ou des polyèdres (3D).
- ▶ Le découpage peut être plus ou moins facile à faire
- ▶ Exemple :



Forme intégrale sur une maille

On reprend, à l'envers, la procédure qui va de la forme intégrale vers la forme EDP :

- ▶ On intègre (1) sur une maille K du maillage :

$$\int_K (\partial_t q + \nabla \cdot F)(t, x) dx = 0.$$

- ▶ Par la formule de la divergence :

$$\frac{d}{dt} \int_K q(t, x) dx + \int_{\partial K} F(t, x) \cdot n(x) d\sigma = 0. \quad (2)$$

(Écriture valable en 2D et 3D ; le cas 1D est différent.)

Intégration en temps et moyenne sur une maille

- ▶ On note t_n et t_{n+1} deux instants tels que $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ et on intègre entre t_n et t_{n+1} :

$$\int_K q(t_{n+1}, x) dx - \int_K q(t_n, x) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial K} F(t, x) \cdot n(x) d\sigma dt = 0. \quad (3)$$

- ▶ On définit la **moyenne** de q sur la maille K :

$$q_K^n = \frac{1}{|K|} \int_K q(t_n, x) dx.$$

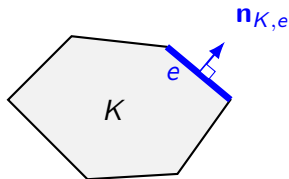
où $|K|$ est le volume (3D) ou l'aire (2D) de K

- ▶ L'égalité (3) devient alors

$$[q_K^{n+1} = q_K^n - \frac{1}{|K|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial K} F(t, x) \cdot n(x) d\sigma dt. \quad (4)$$

Décomposition par arêtes/faces - flux moyen

- ▶ Comme K est un polygone (2D) ou un polyèdre (3D), le bord ∂K est une union d'arêtes (2D) ou de faces (3D).
- ▶ Pour chaque arête/face $e \subset \partial K$, on note $n_{K,e}$ la normale unitaire *dirigée vers l'extérieur* de K .



- ▶ La relation (4) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} q_K^{n+1} &= q_K^n - \frac{1}{|K|} \sum_{e \subset \partial K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e F(t, x) \cdot n_{K,e} d\sigma dt \\ &= q_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{e \subset \partial K} |e| \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t |e|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e F(t, x) \cdot n_{K,e} d\sigma dt \right)}_{\text{flux moyen à travers } e \text{ entre } t_n \text{ et } t_{n+1}} \end{aligned}$$

Forme finale de la loi de conservation sur une maille

- La loi de conservation intégrée sur une maille s'écrit donc

$$q_K^{n+1} = q_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| \bar{F}_{K,e}^n,$$

où le flux moyen est

$$\bar{F}_{K,e}^n = \frac{1}{\Delta t |e|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e F(t, x) \cdot n_{K,e} d\sigma dt.$$

($\bar{F}_{K,e}^n$ a la même dimension que F mais c'est un scalaire, alors que F est un vecteur)

Forme générale d'un schéma Volumes Finis

- ▶ On obtient un schéma volumes finis en **approchant** le flux moyen $\overline{F}_{K,e}^n$ par un *flux numérique* $F_{K,e}^n$, construit à partir des valeurs moyennes $\{q_K^n\}$ sur K et les mailles voisines.
- ▶ Tout schéma volumes finis s'écrit donc sous la forme

$$q_K^{n+1} = q_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{e \in \partial K} |e| F_{K,e}^n.$$

- ▶ $F_{K,e}^n \approx \overline{F}_{K,e}^n$ est appelé **flux numérique** du schéma.
- ▶ q_K^n est maintenant une approximation de la valeur moyenne de $q(t_n, \cdot)$ sur K .
- ▶ NB : *construire le schéma revient à définir $F_{K,e}^n$ en fonction des valeurs $\{q_K^n\}$.*

Approximations usuelles du flux moyen (7)

- ▶ On cherche à approcher

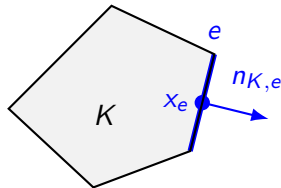
$$\overline{F}_{K,e}^n = \frac{1}{\Delta t |e|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e F(t, x) \cdot n_{K,e} d\sigma dt.$$

- ▶ integrale en temps : approchée par la formule du rectangle à gauche

$$\overline{F}_{K,e}^n \simeq \frac{1}{|e|} \int_e F(t_n, x) \cdot n_{K,e} d\sigma.$$

- ▶ intégrale sur e : approchée par la formule du point milieu

$$\overline{F}_{K,e}^n \simeq F(t_n, x_e) \cdot n_{K,e},$$



NB : on peut augmenter la précision en utilisant des approximations plus précises.

Dernières approximations

- ▶ Il reste à approcher $F(t_n, x_e)$ en fonction de q_K^n et des valeurs q_L^n sur les mailles voisines.
 - ▶ Cela nécessite de connaître l'expression de F en fonction de q .
 - ▶ L'approximation dépend fortement de la nature du flux : diffusion (linéaire), advection, flux non linéaire, etc.
- ↳ Voir les chapitres suivants pour la construction de tels flux numériques.

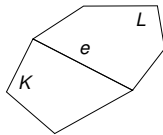
Propriété : schéma conservatif

- ▶ Par construction de l'équation, la quantité globale $Q(t) = \int_{\Omega} q(t, x) dx$ est conservée (constante en temps) si le flux net au bord est nul : $F \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ (exercice).
- ▶ un des grands avantages des schémas VF est qu'ils respectent naturellement cette propriété :

schéma VF conservatif

si le flux numérique vérifie, pour toute arête interne e séparant K et L ,

$$F_{K,e}^n = -F_{L,e}^n,$$

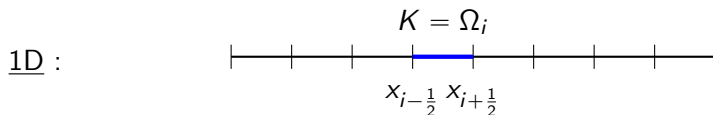


alors
$$\sum_{K \subset \Omega} q_K^{n+1} |K| = \sum_{K \subset \Omega} q_K^n |K|.$$

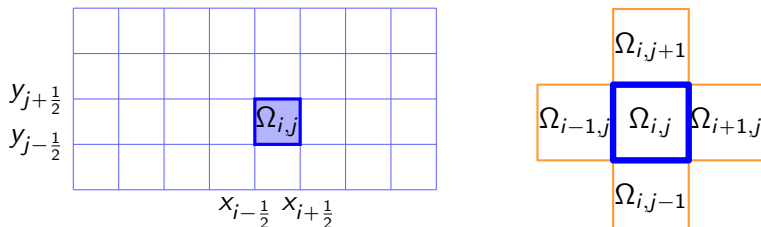
(Preuve : exercice)

Maillages et mailleurs : (1) maillages structurés

(a) Cas cartésien :



2D :

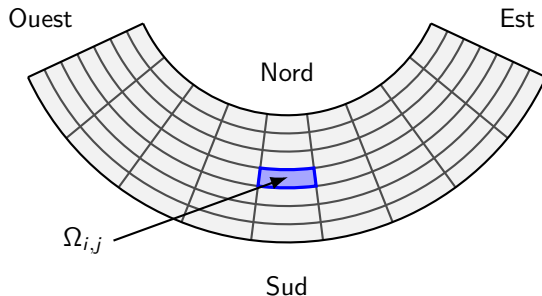


avantage : les mailles voisines sont facilement identifiables

Maillages et mailleurs : (1) maillages structurés

(b) Cas structuré curviligne

- ▶ En 2D : si l'on identifie 4 bords qui se font face
→ on peut construire un maillage de quadrilatères

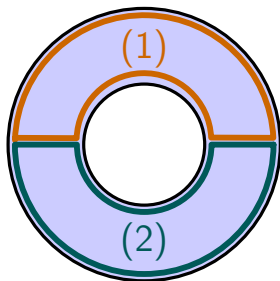


- ▶ Même avantage que le cartésien : voisins faciles à trouver
- ▶ Construction à la main (cas simples) ou avec un logiciel de maillage (ex : ICEM).
- ▶ Possible aussi en 3D
- ▶ Très utilisé en aéronautique (codes industriels)

Maillages et mailleurs : (1) maillages structurés

(c) Cas structuré curviligne *par blocs*

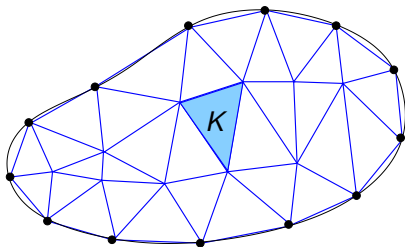
- ▶ si Ω n'est pas déformable en un rectangle : on peut d'abord faire un **découpage** de Ω en *blocs*.
- ▶ Exemple : pour mailler une couronne
 - ↳ découper une couronne en 2 blocs
 - ↳ puis mailler chaque bloc en structuré curviligne.



- ▶ Inconvénient : pas de procédure totalement automatique en 3D → plusieurs semaines de travail ingénieur !

Maillages et mailleurs : (2) maillages non structurés

- ▶ Exemple : maillage de **triangles** (2D).



- ▶ Il existe de nombreux logiciels de maillage pour cela ; en 2D : Gmsh (libre)
 - ↳ Génération automatique, facile à prendre en main en 2D et 3D.

Maillages et mailleurs : avantages / inconvénients

- ▶ Maillages structuré : solveurs linéaires associés plus rapides (voir le chapitre 3 et le cours de SLPI) / construction du maillage parfois fastidieuse
- ▶ Maillages non structurés : génération *automatique* et rapide, utilisable sur toute géométrie / la construction de schémas VF précis sur de tels maillages est parfois difficile

Visualisation des résultats

- ▶ On utilisera les logiciels ParaView ou VisIt.
- ▶ en entrée : un ou plusieurs fichiers contenant les valeurs q_K^n et les informations de maillage
- ▶ permet de visualiser :
 - ▶ Le domaine Ω
 - ▶ Le maillage
 - ▶ Des champs **scalaires** (q_K^n) ou **vectoriels**, avec :
 - ▶ des couleurs, des courbes de niveau,
 - ▶ des flèches/vecteurs, etc.
 - ▶ L'évolution en temps des résultats (animation)