Introduction à la méthode des volumes finis

Filière : Matmeca | Année : 2024-2025 | Semestre : 7

Devoir à la maison du 14/10/2024

CONSIGNES

Pour ce devoir à la maison, vous devez rendre votre copie sur papier **à la fin du cours du 7 novembre**.

ATTENTION : aucun devoir ne sera accepté après ce cours, et la note de 0/20 sera automatiquement attribuée.

SUJET

1 Un problème d'électrostatique

On considère un ensemble de charges électriques dans un domaine borné Ω. Le potentiel du champ électrique créé par ces charges est solution de l'équation de Poisson

$$-\nabla \cdot (\varepsilon \nabla V)(\mathrm{x}) = \frac{\rho(\mathrm{x})}{\varepsilon_0}, \qquad \mathrm{x} \in \Omega,$$

où ρ est la densité de charge (le nombre de charges par unité de volume), ε est la permitivité électrique du milieu (fonction positive supposée connue et dépendante de x), et ε_0 est la permitivité électrique dans le vide qui est une constante donnée. On considère en outre que la valeur du potentiel est fixée sur le bord du domaine à la valeur $V(\mathrm{x}) = V_b(\mathrm{x})$. Le but de cette partie est alors de construire et analyser un schéma volumes finis pour cette équation.

1) En vous inspirant du cours, construisez un schéma volumes finis pour cette équation, en supposant donné un maillage non structuré de Ω constitué de triangles. Précisez bien vos notations, n'hésitez pas à faire un schéma. Détaillez précisément toutes les étapes de votre construction et donnez le nom de chaque approximation utilisée.

2) Quelle hypothèse faut-il faire sur le maillage pour construire ce schéma et pourquoi ?

3) Montrez que ce schéma peut se mettre sous la forme matricielle $Av = b$, et donnez les coefficients de la matrice A et du second membre b.

4) Montrez que A est symétrique définie positive et concluez quant-à l'existence de la solution numérique v.

2 Un problème de thermique avec interface

On s'intéresse à l'évolution de la température dans un fil constitué de deux matériaux différents. Le fil est représenté par le segment $[-1, 1]$, et la température est modélisée par les deux équations suivantes :

$$\partial_t T - \partial_x(D_1 \partial_x T) = 0, \qquad t > 0, \quad x \in [-1, 0] \tag{1}$$

$$\partial_t T - \partial_x(D_2 \partial_x T) = 0, \qquad t > 0, \quad x \in [0, 1]. \tag{2}$$

Chacune de ces équations est une équation de la chaleur. La première modélise l'évolution de la température dans le matériau 1, identifié au segment $[-1, 0]$, de diffusivité constante D_1. La deuxième modélise l'évolution de la température dans le matériau 2, identifié au segment $[0, 1]$, de diffusivité constante D_2.

On se donne une condition initiale $T(0, x) = T_{init}(x)$ dans tout le domaine $[-1, 1]$, une condition aux limites de Neumann à gauche $-D_1 \partial_x T(t, -1) = 0$ et une condition de Dirichlet constante à droite $T(t, 1) = T_D$. Cela ne suffit pas : pour définir la solution, il faut aussi se donner deux conditions d'interface entre les deux matériaux en $x = 0$. La première condition stipule que la température T est discontinue en $x = 0$, avec un saut σ donné et supposé constant :

$$T(t, 0^+) - T(t, 0-) = \sigma, \tag{3}$$

où $T(t, 0^{\pm})$ représente la limite de $T(t, .)$ en 0 à droite et à gauche, respectivement. La deuxième condition stipule que le flux de chaleur est lui continu en $x = 0$, soit

$$-D_2 \partial_x T(t, 0^+) = -D_1 \partial_x T(t, 0^-). \tag{4}$$

Le but de cet exercice est de construire un schéma volumes finis pour ce problème. Pour cela, on considère un maillage à pas uniforme défini de façon à ce que l'interface $x = 0$ soit un noeud du maillage, noté $x_{i_0+\frac{1}{2}}$.

1. Dessinez votre maillage en indiquant soigneusement les indices des noeuds et des mailles particulières.
2. Construisez un schéma volumes finis pour la première équation (1) en tenant compte de la donnée initiale et de la condition aux limites à gauche. L'interface $x = 0$ sera ici considérée comme un bord droit, et le flux numérique sera défini en supposant connue la valeur de T en ce point, notée $T^-_{i_0+\frac{1}{2}}$ (donc sans utiliser de point à droite de $x = 0$). Écrivez soigneusement le schéma en n'oubliant pas de définir tous les flux numériques et en indiquant les numéros des mailles sur lesquelles s'applique le schéma.
3. Même question pour la deuxième équation. L'interface $x = 0$ sera maintenant considérée comme un bord gauche, et le flux numérique en $x = 0$ sera défini en supposant connue la valeur de T en ce point, notée $T^+_{i_0+\frac{1}{2}}$ (donc sans utiliser de point à gauche de $x = 0$). Vous pouvez donner le schéma correspondant sans justification.
4. Pour déterminer les deux valeurs en $x = 0$, utilisez les deux conditions d'interface (3) et (4) et montrez que les valeurs $T^-_{i_0+\frac{1}{2}}$ et $T^+_{i_0+\frac{1}{2}}$ satisfont un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Résolvez ensuite ce système.
5. Enfin, utilisez ce résultat pour calculer le flux numérique à l'interface en fonction des inconnues et écrire ainsi de façon complète un schéma unique sur tout le domaine $[0, 2]$.