Devoir maison 2

Exercice 1

Dans cet exercice, nous montrons qu'un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire alternée non dénégérée est nécessairement de dimension paire.

Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$, soit E un k-espace vectoriel de dimension finie n, et soit ϕ une forme bilinéaire alternée sur E.

1. On suppose $n = 2$ et ϕ non dégénérée. Montrer qu'il existe une base (e_1, f_1) de E telle que
$$\phi(e_1, e_1) = \phi(f_1, f_1) = 0 \qquad \phi(e_1, f_1) = 1.$$
2. Montrer que si n est impair, alors ϕ est dégénérée (on pourra procéder par récurrence).
3. On suppose $n = 2m$ et ϕ non dégénérée. Montrer qu'il existe une base $(e_1, f_1, \dots, e_m, f_m)$ de E telle que
$$\phi(e_i, e_j) = \phi(f_i, f_j) = 0 \qquad \phi(e_i, f_j) = \delta_{i,j} \qquad (1 \leq i, j \leq m)$$
avec $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Exercice 2

On note $\mathbf{F}_p$ le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, où p est un nombre premier impair. Soit E un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Le but de cet exercice est de classifier les formes quadratiques non dégénérées sur E à isomorphisme près.

On rappelle que l'ensemble $\mathbf{F}_p^{\times 2}$ des carrés de $\mathbf{F}_p^\times$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\mathbf{F}_p^\times$. On fixe un élément $\alpha \in \mathbf{F}_p^\times - \mathbf{F}_p^{\times 2}$. On va montrer qu'il y a exactement deux classes d'isomorphisme de formes quadratiques non dégénérées sur E. Plus précisément, toute forme quadratique non dégénérée sur E est donnée, dans une base convenable, par la matrice

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Montrer le résultat pour $n = 1$.
2. Soient $a, b \in \mathbf{F}_p^\times$. Montrer que l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ admet une solution $(x, y) \in \mathbf{F}_p^2$.
3. On suppose $n \geq 2$. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E. Montrer qu'il existe $v \in E$ tel que $q(v) = 1$.
On pourra considérer le plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$*, où* $(e_1, \dots, e_n)$ *est une base orthogonale pour* q.
4. En procédant par récurrence, montrer qu'il existe une base de E dans laquelle q est de la forme annoncée.
5. Soient q_1 et q_2 des formes quadratiques de matrices respectives M_1 et M_2 dans une base donnée de E. Montrer que q_1 et q_2 ne sont pas isomorphes.
6. Étant donnée une forme quadratique q non dégénérée sur E, comment déterminer si q est isomorphe à q_1 ou q_2 ?