Documents autorisés : uniquement le cours. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.

Barème indicatif : 10 points par exercice.

N.B. Les questions 9 à 11 de l'exercice 2 sont indépendantes du reste de l'exercice.

Algèbre 1

Examen final (durée : 3 heures)

Exercice 1

Soit p un nombre premier. On note G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ défini par

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \right\}.$$

1. Déterminer le centre $Z = \{g \in G : \forall h \in G, gh = hg\}$ du groupe G.
2. Montrer l'existence d'une suite exacte courte

$$1 \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to G \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to 1$$

3. Cette suite exacte est-elle scindée ?
4. Montrer que tout élément de Z est un commutateur, *i.e.* de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$ avec $g, h \in G$.
5. Montrer que les caractères linéaires de G sont en bijection avec les caractères de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Soit V le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$. On fixe un caractère non trivial $\psi : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathbf{C}^\times$. Pour $g = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ et $f \in V$, on pose

$$\rho(g)(f)(x) = \psi(cx + b) f(x + a) \qquad (x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}).$$

7. Montrer que (V, ρ) est une représentation de G.
8. Soit χ le caractère de ρ. Montrer que

$$\chi\left(\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } (a,c) \neq (0,0) \\ p\psi(b) & \text{si } (a,c) = (0,0). \end{cases}$$

9. Montrer que ρ est irréductible.
10. En déduire la table des caractères de G.

Exercice 2

Soit k un corps (commutatif) de caractéristique $\neq 2$. Dans tout cet exercice, une forme quadratique sur k est une forme quadratique sur un k-espace vectoriel de dimension finie. On rappelle que deux formes quadratiques q sur E et q' sur E' sont dites isomorphes s'il existe une application k-linéaire bijective $u : E \to E'$ telle que $q = q' \circ u$. On note alors $q \cong q'$.

1. Soit q (resp. q') une forme quadratique sur un k-espace vectoriel E (resp. E') de dimension finie. Montrer que l'application $q \perp q' : E \oplus E' \to k$ définie par $(q \perp q')(x, x') = q(x) + q'(x')$ est une forme quadratique sur $E \oplus E'$.
2. Soit X l'ensemble des classes d'isomorphisme de formes quadratiques sur k. Expliquer pourquoi $\perp$ définit une loi de composition interne commutative et associative sur X.
3. Montrer que la loi $\perp$ possède un élément neutre, mais que $(X, \perp)$ n'est pas un groupe.

Dans la suite, on va affaiblir la relation d'équivalence sur les formes quadratiques de manière à obtenir une structure de groupe. Pour toute forme quadratique q sur k et tout entier naturel $n \geq 0$, on note $q^{\perp n} = \overbrace{q \perp \ldots \perp q}^{n \text{ fois}}$.

On note q_0 la forme quadratique sur k^2 définie par $q_0(x, y) = xy$.

4. Expliciter la forme polaire de q_0 et montrer que q_0 est non dégénérée.
5. Pour $a \in k^\times$, on note $q_a : k \to k$ la forme quadratique définie par $q_a(x) = ax^2$. Montrer que $q_a \perp q_{-a} \cong q_0$.

Soient q et q' des formes quadratiques non dégénérées sur k. On dit que q et q' sont *Witt-équivalentes*, et on note $q \sim q'$, s'il existe des entiers $m, n \geq 0$ tels que $q \perp q_0^{\perp m} \cong q' \perp q_0^{\perp n}$. On note $W(k)$ l'ensemble des classes de Witt-équivalence de formes quadratiques non dégénérées sur k. On montre comme précédemment que $\perp$ définit une loi de composition interne sur $W(k)$.

6. Montrer que $(W(k), \perp)$ est un groupe.
7. Montrer que $W(\mathbf{C})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
8. Montrer que $W(\mathbf{R})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

Dans les questions suivantes, on définit le produit tensoriel de deux formes quadratiques, et on munit $W(k)$ d'une structure d'anneau. Cet anneau est appelée *l'anneau de Witt de k*.

9. Soit E (resp. F) un k-espace vectoriel de dimension finie, et soit λ (resp. μ) une forme linéaire sur E (resp. F). Montrer qu'il existe une unique forme linéaire $\lambda \otimes \mu$ sur $E \otimes_k F$ telle que $(\lambda \otimes \mu)(x \otimes y) = \lambda(x)\mu(y)$ pour tout $x \in E$, $y \in F$.
10. Soit ϕ (resp. ψ) une forme bilinéaire symétrique sur E (resp. F). Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique Φ sur $E \otimes_k F$ telle que $\Phi(x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2) = \phi(x_1, x_2)\psi(y_1, y_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in E$ et $y_1, y_2 \in F$.
11. Soit q_E (resp. q_F) une forme quadratique sur E (resp. F). Montrer qu'il existe une unique forme quadratique $q_E \otimes q_F$ sur $E \otimes_k F$ telle que $(q_E \otimes q_F)(x \otimes y) = q_E(x)q_F(y)$ pour tout $x \in E$, $y \in F$.
12. Montrer que $\otimes$ définit une loi de composition interne sur $W(k)$, puis que $(W(k), \perp, \otimes)$ est un anneau commutatif.