Documents autorisés : uniquement le cours. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.

Barème indicatif (sur 30) : 10 points pour l'exercice 1 et 20 points pour l'exercice 2.

Algèbre 1

Examen partiel (durée : 2 heures)

Exercice 1

Soient G, G', H des groupes, et soient $f : G \to H$, $f' : G' \to H$ des morphismes de groupes. On définit l'ensemble

$$G \times_H G' = \{(g, g') \in G \times G' : f(g) = f'(g')\}.$$

1. Montrer que $G \times_H G'$ est un sous-groupe de $G \times G'$.
2. Montrer que si f' est un isomorphisme de groupes, alors le groupe $G \times_H G'$ est isomorphe à G.

On dit que $G \times_H G'$ est le *produit fibré de* G *et* G' *au-dessus de* H (relativement à f et f').

On se donne maintenant une suite exacte courte de groupes

$$1 \to H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \to 1$$

et un morphisme de groupes quelconque $q : K' \to K$.

3. Montrer l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\mathrm{id}_H"] & G \times_K K' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "p"] & K' \arrow[r] \arrow[d, "q"] & 1 & (1)' \\ 1 \arrow[r] & H \arrow[r, "\alpha"] & G \arrow[r, "\beta"] & K \arrow[r] & 1 & (1) \end{tikzcd}$$

   où p est un morphisme de groupes, et la ligne du haut $(1)'$ est une suite exacte courte de groupes.
4. Montrer que si la suite exacte (1) est scindée, alors la suite exacte (1)' est scindée.
5. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2

Soit G un groupe fini. Dans cet exercice, on se propose de montrer que la table des caractères de G permet de déterminer tous les sous-groupes distingués de G.

1. Montrer que tout sous-groupe distingué de G est réunion de classes de conjugaison de G.

2. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation complexe de dimension finie. On note χ le caractère de ρ. Montrer que

$$\ker(\rho) = \{g \in G : \chi(g) = \dim V\}.$$

3. Montrer que G possède une représentation fidèle (*i. e.* une représentation ρ telle que $\ker(\rho) = \{1\}$).
4. Soit H un sous-groupe distingué de G. On note $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Montrer que si $\overline{\rho}$ est une représentation fidèle de G/H, alors $\rho := \overline{\rho} \circ \pi$ est une représentation de G de noyau H.
5. Soient $\rho_1, \ldots, \rho_m$ des représentations irréductibles de G. Montrer que $\bigcap_{i=1}^{m} \ker(\rho_i)$ est un sous-groupe distingué de G.
6. Montrer que tout sous-groupe distingué de G est de cette forme.
7. À l'aide des questions précédentes, expliquer comment déterminer la liste des sous-groupes distingués de G à partir de la table des caractères de G.

Dans la suite, on étudie le cas particulier du groupe diédral D_8. On rappelle que D_8 est le groupe des isométries d'un carré $ABCD$ centré en O. Il est engendré par la rotation r de centre O et d'angle $\pi/2$, et la symétrie s par rapport à la droite (AC).

8. Expliciter les classes de conjugaison de D_8.
9. Déterminer la liste des sous-groupes distingués de D_8.
10. On donne la table des caractères de D_8 :

	1	r	r^2	s	sr
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0

Vérifier la liste obtenue à la question 9 à l'aide de la méthode de la question 7.