TD n°11 : Décomposition polaire, groupes classiques

Exercice 1. [Questions diverses]

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ (muni de la topologie induite par la topologie d'espace vectoriel normé de $M_n(\mathbb{R})$) est connexe par arcs.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements, et que les retournements sont tous conjugués dans le groupe.
3. Soit n et m deux entiers $\geqslant 1$ différents. Montrer que les groupes $O_n(\mathbb{R})$ et $O_m(\mathbb{R})$ ne sont pas isomorphes. (*Indication :* on pourra dénombrer les classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2.)
4. Montrer que O_n (resp. U_n) est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$).
5. Montrer que l'application exponentielle induit une bijection de $S_n(\mathbb{R})$ vers $S_n^{++}(\mathbb{R})$.
6. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer qu'il existe S_1 et $S_2 \in M_n(\mathbb{R})$ symétriques telles que $A = S_1S_2 - S_2S_1$.

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Déterminer la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ en fonction de celle de A.
2. Déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $\exp(A) = I_n$.

Exercice 3. [Structure de $SO_n(\mathbb{R})$]

1. Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$.
   (a) Déterminer le centre de $O_n(\mathbb{R})$ et celui de $SO_n(\mathbb{R})$. On note $PSO_n(\mathbb{R})$ le quotient de $SO_n(\mathbb{R})$ par son centre.
   (b) Soit $N \lhd SO_3(\mathbb{R})$ un sous-groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$ non réduit à $\{\mathrm{id}\}$. Démontrer qu'il contient un élément u tel que $-1 \leqslant \operatorname{tr} u < 3$.
   (c) En considérant les commutateurs de u et d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $t_0 < 3$ tel que pour tout $t \in [t_0, 3]$, N contienne un élément de trace t.
   (d) En déduire que N contient un élément d'ordre (fini) pair, puis que N contient un retournement.
   (e) Conclure.
2. Simplicité de $PSO_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 5$.
   Dans la suite de l'exercice, $n \geqslant 5$.
   (a) Pour tout sous-espace vectoriel $F \subset \mathbb{R}^n$, on considère $G_F = \{u \in SO_n(\mathbb{R}) | u_{|F} = \mathrm{id}_F\}$. À quoi est isomorphe G_F ?
   (b) Soit $u \in SO_n(\mathbb{R})$ différent de $\pm\,\mathrm{id}$. Montrer qu'il existe un élément $v \in SO_n(\mathbb{R})$ tel que le commutateur $c = [u, v]$ soit différent de $\pm\,\mathrm{id}$ mais fixe un vecteur unitaire.
   (c) Démontrer qu'il existe $w \in SO_n(\mathbb{R})$ tel que le commutateur $[c, w]$ soit différent de $\pm\,\mathrm{id}$ mais fixe un sous-espace vectoriel de codimension $\leqslant 2$.
   (d) En déduire la liste des sous-groupes distingués de $SO_n(\mathbb{R})$ et la simplicité de $PSO_n(\mathbb{R})$.

Remarque. Le groupe $PSO_4(\mathbb{R})$ n'est pas simple : il est isomorphe à $SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice 4. [Action sur la droite projective]

Soit K un corps. On note $\mathbb{P}^1(K)$ l'ensemble des droites vectorielles de K^2. En associant à $\lambda \in K$ la droite $D_\lambda = \text{Vect}\binom{\lambda}{1}$ et à ∞ la droite $D_\infty = \text{Vect}\binom{1}{0}$, on obtient une bijection $\mathbb{P}^1(K) \simeq K \sqcup \{\infty\}$.

1. Montrer que l'action naturelle de $GL_2(K)$ sur K^2 induit une action de $GL_2(K)$ sur $\mathbb{P}^1(K)$. Montrer que le noyau de cette action est le sous-groupe des matrices scalaires et en déduire une action fidèle de $PGL_2(K)$ sur $\mathbb{P}^1(K)$.
2. En déduire que l'expression
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot x = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{cx+d} & \text{si } x \in K \text{ et } cx+d \neq 0 \\ \dfrac{a}{c} & \text{si } x = \infty \text{ et } c \neq 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$
définit une action fidèle de $PGL_2(K)$ sur $\mathbb{P}^1(K)$. Dans la suite, par abus de notation, on pourra identifier les éléments de $PGL_2(K)$ aux transformations correspondantes de $\mathbb{P}^1(K)$, appelées *homographies.*
3. Montrer que l'action de $PGL_2(K)$ sur $\mathbb{P}^1(K)$ est *exactement* 3*-transitive*, c'est-à-dire qu'étant donné deux triplets (a, b, c) et (a', b', c') d'éléments distincts de $\mathbb{P}^1(K)$, il existe un unique élément $g \in PGL_2(K)$ tel que $g \cdot a = a'$, $g \cdot b = b'$ et $g \cdot c = c'$.
4. En déduire les isomorphismes suivants, dits *exceptionnels :*
$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{F}_2) = PGL_2(\mathbb{F}_2) = PSL_2(\mathbb{F}_2) &\simeq \mathfrak{S}(3) & PGL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4) &\simeq \mathfrak{A}(5) \\ PGL_2(\mathbb{F}_3) &\simeq \mathfrak{S}(4) & PSL_2(\mathbb{F}_3) &\simeq \mathfrak{A}(4) \\ PGL_2(\mathbb{F}_5) &\simeq \mathfrak{S}(5) & PSL_2(\mathbb{F}_5) &\simeq \mathfrak{A}(5) \end{aligned}$$
5. Montrer que tout élément de $PGL_2(\mathbb{F}_q)$ fixant à la fois 0 et ∞ est de la forme $x \mapsto \lambda x$, pour un certain $\lambda \in K^\times$. En déduire que les éléments $x \mapsto x+1$, $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto \lambda x$ engendrent $PGL_2(\mathbb{F}_q)$.
6. En utilisant une méthode similaire, trouver un système de générateurs de $PSL_2(\mathbb{F}_q)$.

Exercice 5. [Composantes connexes de $O(p, q)$]

Soit $O(p, q) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid MI_{p,q}\, {}^tM = I_{p,q}\}$ où $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$. On note $n = p + q$.

1. Montrer que $O(p, q)$ est un groupe stable par transposition.
2. Montrer que pour tout $U \in S_n(\mathbb{R})$, $e^U \in O(p, q)$ si et seulement si $UI_{p,q} + I_{p,q}U = 0$.
3. Montrer que $O(p, q)$ est homéomorphe à $(O(p, q) \bigcap O(n, \mathbb{R})) \times (O(p, q) \bigcap S_n^{++}(\mathbb{R}))$.
4. Montrer que $O(p, q) \bigcap O(n, \mathbb{R})$ est homéomorphe à $O(p, \mathbb{R}) \times O(q, \mathbb{R})$.
5. Montrer que $O(p, q) \bigcap S_n^{++}(\mathbb{R})$ est homéomorphe à un espace vectoriel.
6. Conclure.