TD n°4 : Caractères et représentations

Dans tout le TD sauf dans la question 2.1), G est un groupe fini, et les représentations sont de dimension finie sur $\mathbb{C}$ sauf dans l'Exercice 5.

Exercice 1. Soient V et W deux représentations irréductibles de G et $\phi_0 : V \to W$ une application linéaire. Soit $\phi : V \to W$ l'application définie par

$$\phi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \phi_0(g^{-1} \cdot v).$$

Montrer que $\phi = 0$ si V et W ne sont pas isomorphes, et si $V = W$, ϕ est la multiplication par $\mathrm{Tr}(\phi_0)/\dim(V)$.

Exercice 2. [Caractères linéaires d'un groupe]

1. Pour G un groupe, on appelle son *groupe dérivé* le sous-groupe $D(G)$ engendré par les $aba^{-1}b^{-1}, a, b \in G$.
   (a) Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G. Le groupe quotient $G/D(G)$ est appelé *abélianisé* de G.
   (b) On note $\pi : G \to G/D(G)$ le morphisme quotient. Étant donné un groupe abélien H et un morphisme de groupes $f : G \to H$, montrer qu'il existe un unique morphisme $\overline{f} : G/D(G) \to H$ tel que $f = \overline{f} \circ \pi$.
2. On note $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$.
   (a) Montrer que dans le cas général on a $\widehat{G} = \widehat{G/D(G)}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   (c) On admet que tout groupe abélien fini est un produit de groupes cycliques. Montrer que pour tout groupe abélien, $\widehat{G}$ est isomorphe à G.
3. (a) Montrer que si tout élément de G est conjugué à son inverse, tous les caractères de G sont à valeurs réelles.
   (b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, les seuls caractères linéaires de $\mathfrak{S}_n$ sont le caractère trivial et la signature.
   (c) Le groupe alterné admet-il d'autres caractères linéaires que le caractère trivial ? Si oui, dans quels cas ?

Exercice 3. [Groupe diédral]

Pour $n \geq 1$, on note D_{2n} le groupe des isométries du n-gone régulier formé par les racines n-ièmes de l'unité dans le plan complexe. On note r la rotation d'angle $2\pi/n$ de centre 0 et s la symétrie par l'axe des abscisses.

1. Montrer que $D_6 \simeq \mathfrak{S}_3$.
2. Montrer que tout élément de D_{2n} est soit une rotation de la forme $r^k, 0 \leq k \leq n-1$, soit une symétrie orthogonale, et donc de la forme $sr^k, 0 \leq k \leq n-1$. En déduire que le groupe est de cardinal $2n$.
3. Montrer que $sr^k s = r^{-k}$ pour tout $k \in [|1, n|]$. En déduire que si n est impair, toutes les symétries sont conjuguées dans D_{2n}, et si n est pair il y a deux classes de conjugaison de symétries représentées par s et sr.
4. En déduire que D_{2n} a exactement $n/2 + 3$ classes de conjugaison si n est pair, et $(n+3)/2$ classes si n est impair, et les donner.

5. Montrer que pour n impair, les deux seuls caractères linéaires de D_{2n} sont le caractère trivial et le déterminant.
6. Montrer que pour n pair, D_{2n} a exactement quatre caractères linéaires, et les donner.
7. Notons $\zeta_n = e^{2i\pi/n}$. Pour tout entier k entre 1 et $n-1$, on définit la représentation ρ_k sur $\mathbb{C}^2$ par ses valeurs en r et s :

$$\rho_k(r) = \begin{pmatrix} \zeta_n^k & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-k} \end{pmatrix} \quad \rho_k(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que c'est bien une représentation et calculer le caractère correspondant.
8. Montrer que ρ_k et ρ_{n-k} sont isomorphes.
9. Lorsque n est pair, que dire de $\rho_{n/2}$? Montrer que ρ_k est irréductible dans tous les autres cas.
10. Montrer qu'on a ainsi obtenu toutes les représentations irréductibles de D_{2n}.

Exercice 4. [Groupes non abéliens d'ordre 8]

1. Rappeler les classes de conjugaison du groupe dihédral D_8 et ses caractères linéaires. En déduire sa table de caractères.
2. Notons $H_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions, où $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $k = ij = -ji$. Calculer ses classes de conjugaison et son groupe dérivé.
3. Montrer que H_8 possède quatre caractères linéaires distincts. En déduire sa table de caractères. La comparer avec celle de D_8.
4. Montrer que les deux groupes D_8 et H_8 ne sont pas isomorphes.

Exercice 5. 1. Montrer que le groupe G des isométries d'un tétraèdre régulier centré en 0 est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3$ n'admet pas de droite vectorielle stable par G.
3. Montrer que la représentation naturelle de $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ est irréductible.

Exercice 6. Soit X un ensemble fini sur lequel G opère, et on considère la représentation de permutation associée $(\mathbb{C}^X, \rho)$ et son caractère χ.

1. Montrer que le nombre d'orbites dans X coïncide avec le nombre de fois que ρ contient la représentation triviale 1, autrement dit est égal à $\langle \chi, 1 \rangle$.

   En particulier, si l'action de G sur X est transitive, on peut décomposer $\rho = 1 \oplus \theta$, avec θ ne contenant pas 1, et on note ψ son caractère.
2. On fait agir G sur $X \times X$ de façon canonique. Montrer que le caractère de la représentation de permutation associée est égal à χ^2.
3. Supposons que l'action de G sur X est transitive. On dit que cette action est *doublement transitive* si pour tout $(x, y), (x', y') \in X \times X$ avec $x \neq y$ et $x' \neq y'$, il existe $g \in G$ tel que $x' = g \cdot x$ et $y' = g \cdot y$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
   (a) L'action de G est doublement transitive ;
   (b) L'action de G sur $X \times X$ a deux orbites, la diagonale et son complémentaire ;
   (c) $\langle \chi^2, 1 \rangle = 2$;
   (d) La représentation θ définie ci-dessus est irréductible.