ENS Lyon
L3

Algèbre 1
2015-2016

TD n°5 : Représentations et tables de caractères

Exercice 1. [Norme d'un élément de $\mathbf{C}^G$] Soit $x = \sum_{g \in G} a_g e_g$ un élément de $\mathbf{C}^G$. On peut munir $\mathbf{C}^G$ d'une multiplication de la façon suivante : $(\sum_{g\in G} a_g e_g)(\sum_{h \in G} b_h e_h) = \sum_{g,h\in G} a_g b_h e_{gh}$. Cette loi est associative et unitaire de neutre e_1. On peut donc munir $\mathbf{C}^G$ d'une structure de $\mathbf{C}$-algèbre.

1. Montrer que la matrice de l'application $\mu_x : y \mapsto xy$ dans la base canonique $(e_g)_{g\in G}$ est la matrice G-circulante $M = (a_{gh^{-1}})_{g,h\in G}$.
2. En déduire la norme de x.

Exercice 2. [Table de caractères de $\mathfrak{S}_5$] On cherche ici à dresser la table de caractères de $\mathfrak{S}_5$. On notera ε la signature, et on rappelle qu'on connaît une représentation de dimension 4 qui est la représentation standard de $\mathfrak{S}_5$.

1. Donner des représentants des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_5$ et le cardinal de chacune de ces classes.
2. Calculer le caractère de la représentation standard (on notera par la suite H pour la représentation standard).
3. Montrer que la représentation $H(\varepsilon)$ est irréductible non isomorphe à H, et donner son caractère.
4. En faisant agir $\mathfrak{S}_5$ sur les paires d'éléments distincts de $\{1,\dots,5\}$, construire une représentation de dimension 10 de $\mathfrak{S}_5$.
5. Montrer que cette représentation se décompose comme somme de trois représentations irréductibles, dont la standard et la triviale.
6. En déduire que $\mathfrak{S}_5$ possède une représentation irréductible, qu'on notera W, de dimension 5, et calculer son caractère.
7. En utilisant l'orthogonalité des caractères, montrer que $W' = W(\varepsilon)$ n'est pas isomorphe à W.
8. Dresser la table de caractères de $\mathfrak{S}_5$.

Exercice 3. [Groupes non abéliens d'ordre 8]

1. Rappeler les classes de conjugaison du groupe dihédral D_8 et ses caractères linéaires. En déduire sa table de caractères.
2. Notons $H_8 = \{\pm1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions, où $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $k = ij = -ji$. Calculer ses classes de conjugaison et son groupe dérivé.
3. Montrer que H_8 possède quatre caractères linéaires distincts. En déduire sa table de caractères. La comparer avec celle de D_8.
4. Montrer que les deux groupes D_8 et H_8 ne sont pas isomorphes.

Exercice 4. [Décomposition en irréductibles de représentations de $\mathfrak{S}_4$] Soit H la représentation standard de $\mathfrak{S}_4$ et soit V la représentation irréductible de $\mathfrak{S}_4$ de dimension 2 obtenue à partir de la représentation standard de $\mathfrak{S}_3$. Déterminer les décompositions en irréductibles des représentations $\mathrm{Hom}(V,H)$ et $\mathrm{End}(H)$.

Exercice 5. [Produits scalaires invariants] Soit V une représentation irréductible d'un groupe G. Soient $<.,.>$ et $(.,.)$ deux produits scalaires hermitiens sur V et invariants sous G.

1. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $[.,.] = <.,.> - \lambda(.,.)$ soit positif mais pas défini positif.
2. Montrer que la condition $[x,x] = 0$ définit une sous-représentation de V.
3. En déduire que $<.,.>$ et $(.,.)$ sont proportionnels. Montrer que ce résultat n'est plus vrai lorsque V est réductible.