TD n°7 : Formes bilinéaires, produit tensoriel

Comme dans le cours, tout corps est supposé commutatif.

Exercice 1. Soient K un corps et E, F, G trois K-espaces vectoriels. Montrer que si $\phi : E \times F \to G$ est à la fois linéaire et bilinéaire, alors c'est l'application nulle.

Exercice 2. Soit K un corps. Montrer que l'application

$$\begin{aligned}\phi : M_2(K) \times M_2(K) &\to K \\ (A, B) &\mapsto \det(A+B) - \det(A-B)\end{aligned}$$

est bilinéaire et calculer sa matrice dans la base canonique.

Exercice 3. Soient K un corps, $E = K^2$ et ϕ la forme bilinéaire sur E définie par $\phi(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$.

1. Trouver la matrice A de ϕ dans la base $B = ((1, 0), (1, 1))$.
2. Trouver la matrice A' de ϕ dans la base $B' = ((2, 1), (1, -1))$.
3. Trouver la matrice de passage P de B à B', et vérifier que $A' = {}^tPAP$.

Exercice 4. Soient K un corps, E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie et $\phi \in \mathrm{Bil}(E \times F, K)$. Notons $E_0 = F^\perp$ et $F_0 = E^\perp$. Montrer que ϕ induit une forme bilinéaire non dégénérée $\phi_0 : E/E_0 \times F/F_0 \to K$, et en déduire que $\dim(E/E_0) = \dim(F/F_0)$.

Exercice 5. [L'analyse et les formes bilinéaires]

Pour tout corps K et tout ensemble E, on note $K[E]$ le K-espace vectoriel $\oplus_{x \in E} K \cdot e_x$, i.e. tout élément de $K[E]$ est de la forme $\sum_{x \in I} a_x e_x$, où I est un sous-ensemble fini de E, $a_x \in K$ et e_x est un symbole formel.

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R}[\mathbb{R}] \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ \Big(\sum_{x \in I} a_x e_x, f\Big) &\mapsto \sum_{x \in I} a_x f(x)\end{aligned}$$

   est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire, telle que $\mathbb{R}[\mathbb{R}]^\perp = 0$ et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})^\perp = 0$.
2. Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles fermés bornés de la forme $[a, b]$ avec $a < b$. Considérons l'application

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}[\mathcal{I}] \times \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ \Big(\sum_{[a,b] \in I} a_{[a,b]} e_{[a,b]}, f\Big) &\mapsto \sum_{[a,b] \in I} a_{[a,b]} \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

   (a) Montrer que ψ est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}[\mathcal{I}]^\perp = 0$.
   (c) Montrer que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^\perp$ n'est pas réduit à 0 et exhiber un élément non-nul du noyau.

3. Soit D l'application suivante :

$$\begin{aligned} D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f'. \end{aligned}$$

   (a) Montrer que D est $\mathbb{R}$-linéaire et surjective.

   (b) Montrer qu'il existe une unique application $\mathbb{R}$-bilinéaire

   $$D^* : \mathbb{R}[\mathcal{I}] \to \mathbb{R}[\mathbb{R}]$$

   tel que pour tout $X \in \mathbb{R}[\mathcal{I}]$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a

   $$\phi(D^*(X), f) = \psi(X, D(f)),$$

   et donner l'expression de D^* sur les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}[\mathcal{I}]$.

   (c) Montrer que le noyau de D^* s'identifie à l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})^\perp$ de la question 2c.

Exercice 6. Soient E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$ et ϕ l'application

$$\begin{aligned} \phi : E \times E &\to \mathbb{C} \\ (A, B) &\mapsto n \operatorname{Tr}(AB) - \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B). \end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire sur E.
2. Soit $U \subset E$ le sous-espace des matrice de trace nulle. Montrer que ϕ est dégénérée, mais $\phi_{|U}$ est non-dégénérée.
3. Soit $V \subset E$ le sous-espace des matrices A telles que $\operatorname{Tr}(A) = 0$ et ${}^t\bar{A} = -A$. Montrer que $\phi_{|V}$ est définie négative, i.e. pour tout $A \in V \setminus \{0\}$, $\phi(A, A) < 0$.
4. Calculer $E^\perp$ et déterminer sa dimension.

Exercice 7. Soient K un corps et E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Construire un isomorphisme naturel entre $E^* \otimes F$ et $\operatorname{Hom}(E, F)$.

Exercice 8. Soit K un corps avec une suite exacte de K-espaces vectoriels de dimension finie.

$$0 \to F \to E \to G \to 0.$$

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe une suite exacte

$$0 \to F \otimes V \to E \otimes V \to G \otimes V \to 0.$$

Exercice 9. Soient G un groupe fini, K un corps et (ρ, V), (ρ', V') deux représentations de G dimension finie sur K. Construire une représentation $\rho \otimes \rho'$ de G sur $V \otimes V'$, et exprimer son caractère en fonction de ceux de ρ et de ρ'.