ENS Lyon L3

Algèbre 1 2015-2016

TD n°8 : Formes bilinéaires, formes quadratiques

Exercice 1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n.

1. Calculer la dimension de $\mathcal{Q}(E)$.
2. On suppose E de dimension 3 et l'on en fixe cinq vecteurs $x_1, \dots, x_5$. Montrer qu'il existe $q \in \mathcal{Q}(E), q \neq 0$ telle que $q(x_k) = 0$ pour tout k.

Exercice 2. Soit E un K-ev de dimension finie. Montrer que $\mathcal{Q}(E) = \mathrm{Vect}\{f^2 | f \in E^*\}$.

Exercice 3. [Identité du parallélogramme] Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit $q : E \to \mathbf{R}$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall x, y \in E, q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y)).$$

On pose pour $x, y \in E, b(x,y) = \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}$.

1. Montrer que b est symétrique.
2. Montrer que b est additive à droite, i.e. que

$$\forall x, y, z \in E, b(x, y+z) = b(x,y) + b(x,z).$$

   On pourra appliquer la formule de départ aux couples $(x, y+z), (x+y, z), (x+z, y)$ et (y, z).
3. Montrer que $q(x) = b(x,x)$ pour tout $x \in E$.
4. Montrer que b est bilinéaire et que q est une forme quadratique.

Exercice 4. [Fonctions dont la forme polaire est bilinéaire] On s'intéresse aux fonctions $q : E \to K$ telles que $b_q : (x,y) \mapsto \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}$ soit une forme bilinéaire sur E. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{F}_2(E)$.

1. Montrer que $\mathcal{F}_2(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,K)$ et que $u : q \mapsto b_q$ est une application linéaire de celui-ci vers $S_2(E)$.
2. Montrer que $\mathcal{F}_2(E)$ contient toutes les formes quadratiques sur E ainsi que les morphismes de groupes de E dans K.
3. Montrer que $\mathcal{F}_2(E) = \mathcal{Q}(E) \oplus \mathrm{Hom}(E,K)$.
4. En particulier, montrer que si $K = \mathbf{Q}$ et que E est de dimension finie, alors $\mathcal{F}_2(E)$ est l'ensemble des fonctions polynomiales sur E, de degré inférieur ou égal à 2 et qui s'annulent en 0_E.

Exercice 5. [Formes quadratiques sur $M_n(K)$ invariantes par conjugaison] Soit $n \geq 2$ et soit K un corps de caractéristique différente de 2. On va expliciter les formes quadratiques q sur $M_n(K)$ qui sont invariantes par conjugaison, i.e. qui vérifient :

$$\forall A \in M_n(K), \forall P \in GL_n(K), q(PAP^{-1}) = q(A).$$

1. Montrer que $A \mapsto tr(A^2)$ et $A \mapsto tr(A)^2$ sont deux formes quadratiques sur $M_n(K)$ invariantes par conjugaison. Vérifier qu'elles sont linéairement indépendantes.
2. Montrer que l'ensemble des formes quadratiques de $M_n(K)$ invariantes par conjugaison est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}(M_n(K))$. Dans toute la suite, on se donne une forme quadratique q sur $M_n(K)$ invariante par conjugaison et on note b sa forme polaire.

3. Montrer que b est invariante par conjugaison simultanée, i.e.

$$\forall (A,B) \in M_n(K)^2, \forall P \in GL_n(K), b(PAP^{-1}, PBP^{-1}) = b(A,B).$$

4. En montrant que toute matrice nilpotente N de rang 1 est semblable à $2N$, montrer que q s'annule en toute matrice nilpotente de rang 1.
5. Montrer que, quitte à retrancher à q une combinaison linéaire de $A \mapsto tr(A)^2$ et $A \mapsto tr(A^2)$, on peut supposer que $q(E_{1,1}) = 0$ et $q(E_{1,1} - E_{2,2}) = 0$.
6. On suppose dans cette question que $n = 2$
   (a) Montrer que $\forall X \in M_2(K), b(E_{1,1}, X) = 0$.
   (b) Après avoir montré que la classe de similitude de $E_{1,1}$ engendre $M_2(K)$, montrer que $b = 0$.
7. On passe maintenant au cas général.
   (a) Montrer que $b(E_{1,1}, E_{i,j}) = 0$ pour tous $2 \leq i, j \leq n$.
   (b) Montrer que $b = 0$.
8. Conclure.