TD n°9 : Réduction des formes quadratiques et endomorphismes adjoints

Comme dans le cours pour les formes quadratiques, les corps K sont ici de caractéristique différente de 2.

Exercice 1. [Algorithme de Gauss]
Appliquer l'algorithme de Gauss aux formes quadratiques suivantes :

1. $q(x,y,z) = xy + xz + yz$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. $q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2) + xt + xz + zt$ sur $\mathbb{R}^4$.
3. La forme quadratique déterminant sur $M_2(\mathbb{R})$.

Pour chacune d'entre elles, en déduire la signature et le rang.

Exercice 2. [Algorithme de Gauss, conséquences théoriques]
Soit une forme quadratique q sur un K-espace vectoriel E écrite sous la forme

$$q = \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_i^2$$

avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in E^*$ et linéairement indépendantes, et $a_1, \cdots, a_r \in K$ tous non nuls.

1. Exprimer le noyau de q.
2. Donner un moyen d'exhiber une base orthogonale de q.
3. Si $K = \mathbb{C}$, à quelle forme quadratique q est-elle isomorphe ?
4. Si $K = \mathbb{R}$ et $a_1, \cdots, a_r$ sont tous positifs, quel est l'ensemble des vecteurs isotropes de q ?
5. Si M est la matrice de q dans une certaine base de E, montrer qu'elle est congruente à une certaine matrice diagonale.

Exercice 3. [Discriminant]
On appelle discriminant d'une forme quadratique q le déterminant de sa matrice dans une certaine base de E.

1. Montrer que le discriminant est défini à carré dans K^* près.
2. Calculer le discriminant de $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$.
3. Montrer que dans K^*/C où C est le groupe des carrés de K^*, le discriminant est invariant par isomorphisme.
4. En déduire que si $K = \mathbb{Q}$ et $\dim E \geq 1$, il y a une infinité de formes quadratiques non isomorphes deux à deux.

Exercice 4. [Théorème d'inertie de Sylvester]
Donner les signatures et rangs des formes quadratiques suivantes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

1. $M \mapsto \mathrm{Tr}(M^2)$ sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i<j} x_i x_j$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$, étudier les solutions de $q(x) = \lambda$, et en déduire la classification des coniques. Quand obtient-on une conique dégénérée ?

Exercice 5. [Cône isotrope]

Soit q une forme quadratique sur le K-espace vectoriel E. On note $C(q)$, appelé cône isotrope, l'ensemble des vecteurs isotropes de q.

1. Montrer que $C(q)$ est stable par multiplication scalaire, mais pas forcément par addition.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} q \subset C(q)$ mais qu'on n'a pas forcément égalité.
3. Si $C(q) \neq \operatorname{Ker} q$, montrer que q est surjective dans K. Donner ensuite un contre-exemple.
4. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de K^n ne contient pas de vecteur isotrope non nul si et seulement $F \oplus F^\perp = E$.
5. Montrer que si $C(q) \neq \{0\}$ et q est non dégénérée, alors $\operatorname{Vect}(C(q)) = E$.

Exercice 6. [Formes quadratiques en dimension deux]

Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension 2.

1. Montrer que si q contient exactement une droite isotrope, alors q est de rang 1.
2. Montrer que si q contient exactement deux droites isotropes, alors q a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans une certaine base (on parle alors de plan hyperbolique).
3. Montrer que si q contient au moins trois droites isotropes, alors q est nulle.
4. Montrer que q est sans vecteur isotrope si et seulement si son discriminant n'est pas l'opposé d'un carré.

Exercice 7. [Endomorphismes adjoints]

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E, et u un endomorphisme symétrique pour ϕ sur E.

1. Quelle est la forme de la matrice de u dans une base de diagonalisation de ϕ ?
2. Si F est un sous-espace stable de E pour u, montrer que $F^\perp$ l'est aussi.
3. Réciproquement, pour un endomorphisme quelconque u de E stabilisant F et $F^\perp$, si ϕ n'a pas de vecteurs isotropes, montrer que u est symétrique si et seulement si $u_{|F}$ et $u_{|F^\perp}$ le sont.
4. En déduire que les symétries orthogonales sont toujours symétriques. Qu'en est-il des projecteurs orthogonaux ?