ENS Lyon Algèbre 2
L3 2015-2016

DM n°1

Dans ce DM, sauf mentionné, tous les anneaux et corps sont supposés unitaires commutatifs.

Exercice 1. [Un anneau principal non euclidien]

Soit $\alpha := \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$. L'objectif de cet exercice est de prouver que l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ est principal mais non euclidien.

1. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ est isomorphe à l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 5)$.
2. On note N l'application envoyant un élément de $\mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathbb{C}$ sur le carré de son module complexe.
   (a) A l'aide de l'application N, déterminer l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\alpha]$.
   (b) Montrer que si B est un anneau euclidien, il contient un élément b non inversible tel que la restriction à $B^\times \cup \{0\}$ de la projection naturelle $B \to B/(b)$ soit encore surjective. (*Indication : Lorsque B n'est pas un corps, on pourra considérer un élément de stathme minimal.*)
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[\alpha]$ vers $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ lorsque n vaut 2 ou 3.
   (d) En conclure que $\mathbb{Z}[\alpha]$ n'est pas euclidien.
3. Montrer que pour tous éléments $a, b \in \mathbb{Z}[\alpha]$ avec $b \neq 0$, il existe alors une paire (q, r) d'éléments de $\mathbb{Z}[\alpha]$ telle que :
   – $r = 0$ ou $N(r) < N(b)$;
   – $2a = bq + r$.
4. Montrer que l'idéal de $\mathbb{Z}[\alpha]$ engendré par 2 est maximal.
5. Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est principal.
   (*Indication : On pourra s'inspirer de la démonstration donnée pour les anneaux euclidiens.*)

Exercice 2. Soit A un anneau. On dit que A est anti-noethérien si toute suite décroissante d'idéaux est stationnaire. Dans la litérature on utilise plus souvent la terminologie **anneau artinien**. Notons d'abord que pour un anneau artinien, tout ensemble d'idéaux possède un élément minimal, par un argument de type Zorn qui ressemble au cas des anneaux noethériens.

1. Supposons que A est artinien intègre. Soit x un èlément non-nul de A. On a alors une suite décroissante d'idéaux
$$A \supset (x) \supset (x^2) \supset \cdots$$
qui est stationnaire, i.e. il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a \in A$ tels que $x^n = ax^{n+1}$, autrement dit $x^n(1 - ax) = 0$. Comme A est intègre, on en déduit que $ax = 1$ et donc x est inversible. Donc A est un corps.
Pour la deuxième partie, remarquons qu'un quotient d'un anneau artinien par un idéal reste artinien, parce qu'un idéal du quotient se relève en un idéal de l'anneau. Le quotient d'un anneau artinien par un idéal premier étant un anneau artinien intègre, qui est donc un corps, donc l'idéal est en fait maximal.
2. On a une une suite décroissante d'idéaux
$$A \supset N \supset N^2 \supset \cdots$$
qui est stationnaire, i.e. il existe $n \geqslant 1$ et $a \in A$ tels que $N^n = N^{n+1}$. Supposons par l'absurde que N n'est pas nilpotent. Alors l'ensemble E est idéaux I de A tels que $IN^n \neq 0$ est non-vide. Soit J un élément minimal de E. Par minimalité, on a $E = (x)$ est un idéal

principal. On a de plus $(x) \supset N^n \cdot (x)$, et $N^n \cdot (x) \in E$, donc $(x) = N^n \cdot (x)$ par minimalité. Donc il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in N$ tels que

$$x = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)x,$$

autrement dit $x(1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_k) = 0$. Or les λ_i sont nilpotents,donc $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ aussi, et alors $1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_k$ est inversible (TD1, 1.2.), donc $x = 0$, absurde.

3. Soit $I = \prod_{i=1}^n P_i$ un idéal qui est minimal parmi les produit finis d'idéaux premiers distincts. Pour tout idéal premier P distinct des P_i, on a $IP = I$ par minimalité de I, donc $P \supset IP = I = \prod_{i=1}^n P_i$. Par TD2, 4.2., P contient l'un des P_i, et comme tout idéal premier est maximal, P est égal à l'un des P_i, absurde. Donc les P_i sont les seuls idéaux premiers.

   Comme les idéaux maximaux sont deux à deux premiers entre eux, le produit de tous les idéaux maximaux coïncide avec le nilradical, donc est nilpotent par la question précédente.

4. La première assertion provient de la question précédente et du lemme admis.

   Inversement, dans un anneau noethérien il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux (TD3 5.2.), et le nilradical est nilpotent (TD3 4.2.). Si de plus tout idéal premier est maximal, alors il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux. Donc par le même argument que la question précédente, il existe un nombre fini d'idéaux maximaux dont le produit est nul. Le résultat découle du lemme admis.