

TD n°1 : ANNEAUX, DIVISIBILITÉ ET IRRÉDUCTIBILITÉ

Dans ce TD, sauf pour l'Exercice 8, tous les anneaux et corps sont supposés commutatifs.

Exercice 1. [Questions diverses]

1. Montrer que dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, l'élément 2 est irréductible mais n'est pas premier.
2. Soient A un anneau et $a \in A$ un élément nilpotent. Montrer que $1 + a$ est inversible dans A .
3. Soit A un anneau intègre. Montrer que les éléments inversibles de $A[X]$ sont exactement les constantes inversibles dans A .
4. Exhiber un élément inversible de degré non nul dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 2. 1. Montrer que, quelque soit le corps K , l'ensemble E des polynômes irréductibles unitaires de $K[X]$ est infini.

2. Montrer que si K est fini ou dénombrable alors E est dénombrable.
3. Montrer que si K n'est pas dénombrable alors E ne l'est pas non plus.

Exercice 3. [Mise en jambes sur les morphismes d'anneaux...]

1. Soit A un anneau. Déterminer tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{Z} \rightarrow A$, $\mathbb{Z}[X] \rightarrow A$, $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ puis $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$.
3. Soit G un groupe abélien noté additivement. Montrer que l'ensemble A des morphismes de groupes $G \rightarrow G$ est naturellement muni d'une structure d'anneau. A quel anneau classique est-il isomorphe lorsque $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \geq 1$ entier ?

Exercice 4. [Anneaux de valuation discrète]

Soit K un corps. Une *valuation discrète* sur K est une fonction surjective $v : K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que pour tous $x, y \in K^*$:

$$v(xy) = v(x) + v(y) \quad \text{et} \quad v(x + y) \geq \min(v(x), v(y)).$$

1. Donner pour $K = \mathbb{Q}$ et tout premier p , une valuation discrète v_p sur \mathbb{Q} telle que $v_p(p) = 1$.
2. Montrer qu'à toute valuation discrète sur K , on peut associer une distance *d ultramétrique* sur K , c'est-à-dire telle que pour tous $x, y, z \in K$:

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)).$$

Comment s'intersectent les boules pour cette distance ? Calculer, pour la valuation v_2 du (a) et la distance correspondante, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n$.

3. Montrer que pour un corps K muni d'une valuation discrète v , $A := \{x \in K | v(x) \geq 0\}$ est un anneau tel que $A^* = v^{-1}(0)$. Un anneau ainsi obtenu est appelé *anneau de valuation discrète*. Dire quels sont les anneaux ainsi obtenus pour les exemples du (a).
4. Pour un anneau de valuation discrète A , une *uniformisante de A* est un élément π de A de valuation 1. Montrer que tout élément non-nul de A s'écrit de manière unique $a = \pi^n u$ avec $u \in A^*$.
5. En déduire que les idéaux de A sont exactement les idéaux de la forme (π^n) , $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme primitif à coefficients dans \mathbb{Z} (i.e. les coefficients sont premiers entre eux dans l'ensemble) et soit p un entier premier ne divisant pas a_n .

1. Montrer que si la réduction modulo p du polynôme $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, alors $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Supposons que pour tout p ne divisant pas a_n , la réduction modulo p n'est pas irréductible. Peut-on en déduire que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 6. Soit E l'ensemble des fonctions de $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ telles que $f(n) \in \mathbb{Z}$ pour n assez grand et $P = E \cap \mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer que $P \neq \mathbb{Z}[X]$.
2. Soit $\Delta : E \rightarrow E$ l'application telle que $(\Delta f)(n) = f(n) - f(n-1)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) $f \in P$
- (b) $\Delta f \in P$
- (c) $\exists n \in \mathbb{N}, \Delta^n f = 0$

Quel est le plus grand entier d tel que $\Delta^d f \neq 0$?

3. Soit $P_i = \frac{1}{i!} X(X-1) \dots (X-i+1)$. Montrer que (P_i) forme une \mathbb{Q} -base de $\mathbb{Q}[X]$ ainsi qu'une \mathbb{Z} -base de P autrement dit telle que tout élément $f \in P$ s'écrit comme une somme $\sum n_i P_i$ avec les $n_i \in \mathbb{Z}$.
4. En déduire que si $f \in P$ est de degré d , alors $d!f \in \mathbb{Z}[X]$ et $f(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7. [L'anneau des fonctions holomorphes]

Soit $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ l'anneau des fonctions holomorphes dans tout le plan complexe.

1. Montrer que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est un anneau intègre et déterminer son corps des fractions, et identifier les éléments inversibles.
2. Montrer qu'un élément $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ est irréductible si et seulement s'il admet un seul zéro et que celui-ci est de plus un zéro simple. En déduire que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ n'est pas factoriel.

Exercice 8. [Algèbre d'un groupe]

Soit K un corps et G un groupe. Notons $K[G]$ l'espace vectoriel sur K ayant pour base $\{e_g, g \in G\}$.

1. Montrer que $K[G]$ est muni d'une structure d'anneau unitaire pour la multiplication suivante :

$$\left(\sum_{g \in G} a_g e_g \right) \cdot \left(\sum_{h \in G} b_h e_h \right) := \sum_{g, h \in G} a_g b_h e_{gh} .$$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur G pour que l'anneau $K[G]$ soit commutatif.
3. Montrer que toute représentation K -linéaire (V, ρ) de G muni V d'une structure de $K[G]$ -module à gauche et que tout morphisme de représentations est alors un morphisme de $K[G]$ -modules.
4. Inversement, montrer que pour tout $K[G]$ -module V , le groupe abélien V possède une structure de K -espace vectoriel et que l'application $G \times V \ni (g, v) \mapsto e_g \cdot v \in V$ est une représentation K -linéaire de G sur V . Montrer alors que tout morphisme de $K[G]$ -module induit un morphisme de représentations.
5. Montrer que les deux constructions précédentes sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit, les notions de représentations K -linéaires de G et de $K[G]$ -modules sont équivalentes.