TD n°11 : Extensions normales, extensions séparables

Exercice 1. [Corps parfait]
Soient K un corps et $P \in K[X]$.

1. Montrer que si $car(K) = 0$, $P' = 0$ si et seulement si P est constant.
2. Montrer que si K est de caractéristique $p > 0$, alors $P' = 0$ si et seulement s'il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = Q(X^p)$.
3. Un corps K est dit *parfait* si toute extension finie de K est séparable.
   (a) Montrer qu'un corps algébriquement clos est parfait.
   (b) Montrer qu'un corps de caractéristique nulle est parfait.
   (c) Montrer qu'un corps de caractéristique positive est parfait si et seulement si l'endomorphisme de Frobenius est un isomorphisme.
   (d) Montrer qu'un corps fini est parfait.
   (e) Montrer qu'une extension algébrique d'un corps parfait reste parfait.

Exercice 2. [Extensions normales : un exemple concret]
Soit P le polynôme $X^3 + X^2 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer que le polynôme P est irréductible.
   On note α une racine de P et $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ le corps de rupture de P.
2. Vérifier que $\alpha^2 - 2$ est aussi racine de P.
3. En déduire que P est scindé sur K et que l'extension $K/\mathbb{Q}$ est normale.
4. Déterminer le groupe $Aut(K/\mathbb{Q})$.

Exercice 3. 1. Montrer que une extension quadratique est normale.

2. Soient L/K une extension de corps et $(L_i)_{i\in I}$ une famille de sous-extensions normales. Montrer que l'intersection $\cap_{i\in I} L_i$ est une extension normale de K.
3. Soient K et K' deux sous-corps d'un corps L tels que les deux extensions L/K et L/K' sont normales et que l'extension $L/K \cap K'$ est algébrique. Montrer que l'extension $L/K \cap K'$ est normale aussi.

Exercice 4. Soient L/K et M/L deux extensions finies de corps.

1. Est-ce que L/K et M/L normales impliquent M/K normale ?
2. Est-ce que L/K et M/K normales impliquent M/L normale ?
3. Est-ce que M/K et M/L normales impliquent L/K normale ?

Exercice 5. [Extension sans élément primitif]

1. Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Expliquer pourquoi $P(X) = X^p + T$ est irréductible sur $K(T)$. Montrer qu'un corps de rupture de P en est aussi un corps de décomposition.
2. Soit $K = \mathrm{Frac}(\mathbb{F}_p[T, U])$ et L un corps de décomposition de $P(X) = (X^p - T)(X^p - U)$.
   (a) Montrer que $[L : K] = p^2$.
   (b) Montrer que si $x \in L$, alors $x^p \in K$.
   (c) En déduire que L/K n'admet pas d'élément primitif.

Exercice 6. Soit L/K une extension finie de corps.

1. Montrer que si tout élément de $L \setminus K$ est inséparable sur K (on dit que l'extension est *purement inséparable* ou *radicielle*), alors la caractéristique de K est un nombre premier p, que $[L:K]_s = 1$ et que $[L:K]$ est une puissance de p.
2. Montrer que dans le cas général, $[L:K]_s$ divise $[L:K]$ et que soit le quotient est 1, soit K est de caractéristique p et le quotient est une puissance de p.
3. Montrer que le groupe $Aut(L/K)$ est fini et que son cardinal divise $[L:K]_s$, et les deux coïncident si et seulement si l'extension est normale.

Exercice 7. [Factorisation d'un polynôme dans une extension]

Soient L/K une extension de degré m et $P \in K[X]$ un polynôme irréductible unitaire de degré n. On note $d = \mathrm{pgcd}(m,n)$.

1. Montrer que le degré de tout facteur irréductible de P dans $L[X]$ est un multiple de n/d, et que P possède au plus d facteur irréductibles dans $L[X]$. Que dire si $d = 1$?
2. Supposons que l'extension L/K est normale. Montrer que si P_1 et P_2 sont deux facteurs irréductibles de P dans $L[X]$, alors il existe un élément de $Aut(L/K)$ qui envoie P_1 sur P_2. En déduire que tous les facteurs irréductibles de P dans $L[X]$ ont le même degré. Quelle relation y a-t-il entre d et le nombre de tels facteurs irréductibles ?

Exercice 8. [Trace et norme]

Soit L/K une extension finie de corps. Pour tout $\alpha \in L$, soit

$$\begin{aligned} T_\alpha^L : L &\to L \\ x &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

(On pourra omettre l'exposant L s'il est clair dans le contexte).

1. Montrer que T_α^L est une application K-linéaire. On note respectivement $Tr_{L/K}(\alpha)$ et $Nm_{L/K}(\alpha)$ (et on appelle respectivement *trace* et *norme* de l'élément α) la trace et le déterminant de cette application K-linéaire.
2. Que valent $Tr_{L/K}(\alpha)$ et $Nm_{L/K}(\alpha)$ quand $\alpha \in K$?
3. Montrer que
$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in L, \forall \lambda \in K, \quad Tr_{L/K}(\alpha + \lambda\beta) &= Tr_{L/K}(\alpha) + \lambda Tr_{L/K}(\beta) \\ \forall \alpha, \beta \in L, \quad Nm_{L/K}(\alpha\beta) &= Nm_{L/K}(\alpha) Nm_{L/K}(\beta). \end{aligned}$$
4. Soient $M/L/K$ une tour d'extensions finies et $\alpha \in L$. Montrer que
$$Tr_{M/K}(\alpha) = [M:L] Tr_{L/K}(\alpha) \text{ et } Nm_{M/K}(\alpha) = Nm_{L/K}(\alpha)^{[M:L]}.$$
5. Soient K un corps et α un élément algébrique sur K. Montrer que le polynôme caractéristique de l'application K-linéaire $T_\alpha^{K(\alpha)}$ est égal au polynôme minimal de α sur K.
6. Soient L/K une extension finie séparable et $\alpha \in L$. Montrer que
$$Tr_{L/K}(\alpha) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}_K(L,\bar{K})} \sigma(\alpha) \text{ et } Nm_{L/K}(\alpha) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_K(L,\bar{K})} \sigma(\alpha),$$
où $\mathrm{Hom}_K(L,\bar{K})$ est l'ensemble des plongements K-linéaires de L dans $\bar{K}$.