# TD n°12 : Théorie de Galois

**Exercice 1.** Soient $x = \sqrt[3]{2}, j = e^{2i\pi/3}$ et $K = \mathbf{Q}[x, j]$.

1. Montrer que $K/\mathbf{Q}$ est galoisienne, de dimension 6, et que $Gal(K/\mathbf{Q})$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.
2. Expliciter la correspondance de Galois pour l'extension $K/\mathbf{Q}$.

**Exercice 2.** Soit $x = \sqrt{1+\sqrt{2}} \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que $[\mathbf{Q}[x] : \mathbf{Q}] = 4$.
2. Montrer que $\mathbf{Q}[x]/\mathbf{Q}$ n'est pas galoisienne, mais que $\mathbf{Q}[x]/\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]/\mathbf{Q}$ le sont.
3. Montrer qu'en revanche $\mathbf{Q}[\sqrt{2+\sqrt{2}}]$ est galoisienne de degré 4 sur $\mathbf{Q}$.

**Exercice 3.** Soit $K$ une extension finie de $\mathbf{R}$. On veut montrer que $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Montrer que si $K/\mathbf{R}$ est de degré 2, alors $K$ est isomorphe à $\mathbf{C}$.
2. Montrer que si $K/\mathbf{R}$ est de degré impair, alors $K = \mathbf{R}$.
3. Montrer que $\mathbf{C}$ n'admet pas d'extension de degré 2.
4. Supposons $K/\mathbf{R}$ galoisienne finie. Montrer qu'il existe une tour d'extensions
$$\mathbf{R} \subset K_1 \subset K_2 \cdots \subset K_n = K$$
telle que $[K_1 : \mathbf{R}]$ est impair et pour $i = 1, \ldots, n-1$, $[K_{i+1} : K_i] = 2$.
5. Conclure.

**Exercice 4.** Soit $P(X) = X^5 - 6X + 3 \in \mathbf{Q}[X]$.

1. Montrer que $P$ est irréductible.
2. Montrer que $P$ possède trois racines réelles et deux racines complexes conjuguées.
3. On fixe désormais $L$ un corps de décomposition de $P$, et on note $G = Gal(L/\mathbf{Q})$. Montrer que $G$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$.
4. En déduire la forme des sous-extensions galoisiennes de $L/\mathbf{Q}$.

**Exercice 5.** Soit $L/K$ une extension finie de corps.

1. Montrer que si tout élément de $L \setminus K$ est inséparable sur $K$ (on dit que l'extension est *purement inséparable* ou *radicielle*), alors la caractéristique de $K$ est un nombre premier $p$, que $[L : K]_s = 1$ et que $[L : K]$ est une puissance de $p$.
2. Montrer que dans le cas général, $[L : K]_s$ divise $[L : K]$ et que soit le quotient est 1, soit $K$ est de caractéristique $p$ et le quotient est une puissance de $p$.
3. Montrer que le groupe $Aut(L/K)$ est fini et que son cardinal divise $[L : K]_s$, et les deux coïncident si et seulement si l'extension est normale.

**Exercice 6.** Soient $p_1, \ldots, p_r$ des éléments de $\mathbf{Q}^*$, et $K = \mathbf{Q}[\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_r}]$.

1. Montrer qu'on peut munir le groupe $\mathbf{Q}^*/(\mathbf{Q}^*)^2$ d'une structure de $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel, et que la famille $\overline{-1}, \overline{p}$, où $p$ parcourt les nombres premiers, en est une base.
2. On suppose que les images de $p_1, \ldots, p_r$ dans $\mathbf{Q}^*/(\mathbf{Q}^*)^2$ vu comme $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel sont indépendantes. Montrer que $[K : \mathbf{Q}] = 2^r$.
3. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}$ n'est pas entier pour $n \geq 2$.