

TD n°2 : ANNEAUX, MORPHISMES D'ANNEAUX, IDÉAUX

Exercice 1. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Montrer que l'image réciproque par φ d'un idéal de B est un idéal de A . Qu'en est-il pour un idéal premier ? Pour un idéal maximal ? Donner une condition sous laquelle l'image directe de tout idéal de A est un idéal de B .

Exercice 2. Soit A un anneau et soient I, J deux idéaux de A .

1. Décrire les idéaux (quelconques, puis premiers et maximaux) de l'anneau quotient A/I .
2. Donner un isomorphisme naturel entre l'anneau $A/(I + J)$ et un quotient de A/I .

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif et $a, b \in A$.

1. Montrer que a est inversible dans A si et seulement si $(a) = A$.
2. Montrer que a est un diviseur de b dans A si et seulement si $(b) \subset (a)$.
3. Supposons que A soit intègre.
 - (a) Montrer que a et b sont associés dans A si et seulement si $(a) = (b)$.
 - (b) Montrer que a est premier dans A si et seulement si (a) est un idéal premier de A .
 - (c) Montrer que a est irréductible dans A si et seulement si (a) est maximal parmi les idéaux principaux de A . En déduire que lorsque A est principal, a est irréductible dans A si et seulement si (a) est un idéal maximal de A .

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif.

1. Soient I et J deux idéaux de A premiers entre eux. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, les idéaux I^n et J^n sont premiers entre eux.
2. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de A . Montrer que pour toute famille finie $\{I_1, \dots, I_n\}$ d'idéaux de A vérifiant $I_1 \cdot \dots \cdot I_n \subset \mathfrak{p}$, il existe un entier $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $I_k \subset \mathfrak{p}$.
3. Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ des idéaux premiers de A . Supposons que I soit un idéal de A contenu dans $\bigcup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$. Montrer qu'il existe un entier $k \in \{1, \dots, r\}$ tel que I soit inclus dans \mathfrak{p}_k .
4. Soit I un idéal non premier de A . Montrer qu'il existe des idéaux $I_1 \neq I_2$ de A distincts de I et de A tels que l'on ait $I_1 I_2 \subset I \subset I_1 \cap I_2$.

Exercice 5. Un *anneau local* est un anneau qui ne possède qu'un seul idéal maximal.

1. Un corps est-il un anneau local ?
2. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
 - (a) A est un anneau local ;
 - (b) le complémentaire de A^\times dans A est un idéal de A ;
 - (c) pour tout élément $x \in A$, x ou $1 - x$ est un élément inversible de A ;
 - (d) la somme de deux éléments non inversibles de A est encore un élément non inversible de A .
3. Montrer que le quotient d'un anneau local par un idéal propre est encore un anneau local.

Exercice 6. [Radical]

Soit A un anneau. Pour tout idéal I de A , on appelle radical de I , noté \sqrt{I} l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}$$

En particulier, le nilradical de A est le radical de (0) .

- (a) Montrer que \sqrt{I} est un idéal de A et que $\sqrt{(\sqrt{I})} = \sqrt{I}$.
- (b) Donner les radicaux des idéaux de \mathbb{Z} et $\mathbb{C}[X]$.
- (c) Montrer que le nilradical de A est inclus dans l'intersection de ses idéaux premiers, puis que pour tout I , le radical de I est inclus dans l'intersection des idéaux premiers contenant I .
- (d) (*Bonus*) Montrer en utilisant le lemme de Zorn que ces inclusions sont des égalités.

Exercice 7. [Spectre d'un anneau]

Pour tout anneau A , on note $\text{Spec } A$ l'ensemble des ses idéaux premiers. Pour tout idéal I de A et $V \subset \text{Spec } A$, on note

$$\mathcal{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid I \subset \mathfrak{p}\} \quad \mathcal{I}(V) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}.$$

- (a) Montrer que les fonctions \mathcal{V} et \mathcal{I} sont décroissantes pour l'inclusion, et que pour tous idéaux I et J de A

$$\mathcal{V}(I \cap J) = \mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J).$$

- (b) Montrer que pour toute famille d'idéaux $(I_\alpha)_\alpha$ de A et I l'idéal engendré par leur union,

$$\mathcal{V}(I) = \bigcap_\alpha \mathcal{V}(I_\alpha).$$

- (c) Montrer grâce à la question (d) de l'exercice précédent que pour tout idéal I de A ,

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}.$$

- (d) Dessiner $\text{Spec } \mathbb{Z}$ et $\text{Spec } \mathbb{C}[X]$.