ENS Lyon
L3

Algèbre 2
2015-2016

TD n°3 : Anneaux noethériens

Dans ce TD, sauf mentionné, tous les anneaux et corps sont supposés unitaires commutatifs.

Exercice 1. [Radical]
Soit A un anneau. Pour tout idéal I de A, on appelle radical de I, noté $\sqrt{I}$ l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{a \in A | \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}$$

En particulier, le nilradical de A est le radical de (0).

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A et que $\sqrt{(\sqrt{I})} = \sqrt{I}$.
2. Donner les radicaux des idéaux de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que le nilradical de A est inclus dans l'intersection de ses idéaux premiers, puis que pour tout I, le radical de I est inclus dans l'intersection des idéaux premiers contenant I.
4. *(Bonus)* Montrer en utilisant le lemme de Zorn que ces inclusions sont des égalités.

Exercice 2. Parmi les anneaux suivants, lesquels sont noethériens ?

1. Le sous anneau $A \subset \mathbb{C}(X)$ constitué des fractions rationnelles sans pôles sur le cercle $|z| = 1$.
2. L'anneau des séries entières ayant un rayon de convergence strictement positif.
3. L'anneau des séries entières ayant un rayon de convergence infini.
4. L'anneau des polynômes à coefficients rationnels tels que $P(0) \in \mathbb{Z}$.
5. L'anneau des suites à termes dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3. [Généralités sur les anneaux noethériens]

1. Un sous-anneau (respectivement quotient par un idéal premier) d'un anneau noethérien (respectivement principal, euclidien) vérifie-t-il la même propriété ?
2. Supposons $A[X]$ noethérien. A est-il noethérien ?
3. Soit A un anneau noethérien. Montrer que tout élément s'écrit comme produit d'irréductibles.

Exercice 4.
1. Soit A un anneau noethérien. Montrer que tout idéal s'écrit comme intersection finie d'idéaux irréductibles, où un idéal I est dit irréductible si $I = I_1 \cap I_2 \Rightarrow I = I_1$ ou $I = I_2$.
2. Soient A un anneau noethérien et I un idéal. On rappelle que $\sqrt{I}$ est l'idéal défini par $\sqrt{I} = \{x \in A, \exists n > 0, x^n \in I\}$. Montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $(\sqrt{I})^n \subset I$.

Exercice 5. Soit A un anneau noethérien.

1. Soit I un idéal de A. Montrer qu'il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{n}_n$ contenant I tels que $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n \subset I$.
2. En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premier minimaux pour l'inclusion.
3. *Bonus : en utilisant le lemme de Zorn, montrer que tout idéal premier de A contient un idéal premier minimal.*

Exercice 6. Le but de cet exercice est de déterminer la forme des idéaux premiers et maximaux de $\mathbb{Z}[X]$. Soit I un idéal premier.

1. Montrer que $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$.
2. On suppose que $I \cap \mathbb{Z} = 0$ et on note $\tilde{I} = I\mathbb{Q}[X]$ l'idéal engendré par I dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que $\tilde{I} \cap \mathbb{Z}[X] = I$. En déduire que I est principal engendré par un polynôme non constant irréductible et primitif.
3. On suppose que $I \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Montrer que I/pI est un idéal premier de $\mathbb{F}_p[X]$. En déduire que I est engendré soit par p, soit par p et un polynôme unitaire dont la réduction modulo p est irréductible.
4. Parmi les idéaux trouvés, lesquels sont maximaux ?
5. En s'inspirant de cette méthode, montrer que les idéaux premiers de $\mathbb{C}[X, Y]$ sont soit principaux, soit de la forme $(X - a, Y - b)$. Quels sont les idéaux maximaux ?

Exercice 7. [Retour sur le radical] Soit A un anneau.

1. Soient $U \subset A$ un sous-ensemble stable par multiplication et I un idéal qui est maximal parmi les idéaux contenus dans $A \setminus U$. Montrer que I est un idéal premier.
2. En déduire une autre preuve de la question 4) de l'exercice 1.
3. Soit $J(A)$ l'ensemble des $x \in A$ tels que pour tout $y \in A$, $1 + xy$ est inversible. Montrer que $J(A)$ est l'intersection des idéaux maximaux de A.
4. Montrer que $J(A/J(A)) = 0$.

Exercice 8. [Dimension d'un anneau]

Sur un anneau A, une chaîne de longueur n est une suite strictement croissante d'idéaux premiers de A

$$\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n.$$

On appelle dimension de Krull la borne supérieure des longeurs de chaînes de A (pouvant être infinie).

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est de dimension 1, et que tout corps K est de dimension 0.
2. Montrer que pour tout corps K et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim K[X_1, \cdots, X_n] \geq n$. Trouver un anneau de dimension infinie.
3. Montrer que pour un idéal I de A, $\dim A/I \leq \dim A$.

Exercice 9. Soient X un espace topologique compact (i.e. quasi-compact et séparé) et $R = \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues. Soit $\mu : X \to \mathrm{MaxSpec}\, R$ (où $\mathrm{MaxSpec}\, R$ est l'ensemble des idéaux maximaux de R) l'application qui à un point x de X associe l'idéal m_x des fonctions s'annulant en x.

1. Vérifier que m_x est bien un idéal maximal.
2. Montrer que μ est injective en utilisant le lemme d'Urysohn.
3. Soit m un idéal maximal de R. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $m = m_x$, et en déduire que μ est surjective.
   (*Indication : soit $V(m)$ l'ensemble des zéros communs des éléments de m, montrer que $V(m)$ est non-vide en utilisant la compacité de X.*)
4. Pour tout $f \in R$, on note $U_f = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$ et $V_f = \{m \in \mathrm{MaxSpec}\, R | f \notin m\}$. Montrer que $\mu(U_f) = V_f$.