ENS Lyon — Algèbre 2
L3 — 2015-2016

TD n°4 : Anneaux de polynômes

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif unitaire.

1. Si $a, b \in A$, montrer que l'application $A[X,Y] \to A$ donnée par $P(X,Y) \mapsto P(a,b)$ est un morphisme d'anneaux.
2. Montrer que si $A = \mathbf{Q}$, alors tout morphisme $\mathbf{Q}[X,Y] \to \mathbf{Q}$ est de cette forme.
3. Montrer que si $A = \mathbf{C}$, alors il existe un morphisme $\mathbf{C}[X,Y] \to \mathbf{C}$ qui n'est pas de cette forme.
4. Décrire tous les morphismes d'anneaux $A[X,Y] \to A$.

Exercice 2. Soit $(P,Q) \in K_n[X] \times K_m[X]$.
On définit une application $\varphi : K_{m-1}[X] \times K_{n-1}[X] \to K_{n+m-1}[X]$ en posant $\varphi(U,V) = UP + VQ$.

1. À quelle condition sur (P,Q) cette application est-elle bijective ?
2. Déterminer $\Im(\varphi)$ en fonction du pgcd de P et Q et expliquer comment déterminer de façon générale le pgcd de deux polynômes par un algorithme.
3. Utiliser la méthode décrite à la question précédente pour déterminer le pgcd de $X^n - 1$ et $X^m - 1$ dans $K[X]$.
4. Ecrire la matrice de l'application φ dans les bases $((X^{m-1}, 0), \ldots, (1,0), (0, X^{n-1}, \ldots, (0,1))$ et $(X^{m+n-1}, \ldots, 1)$. On appelle résultant de P et Q et on note $Res(P,Q)$ le déterminant de cette matrice.
5. Si $P \in K[X]$, on appelle discriminant de P, noté $\mathrm{disc}(P)$ le résultant de P et de P'. Calculer le discriminant de P dans le cas où P est de degré 2 ou 3.

Exercice 3. [Multiplicité et dérivées] Soient K un corps, P un polynôme en une variable à coefficients dans K, α un élément de K et m un entier supérieur ou égal à 1.

1. On suppose que α est racine de P de multiplicité supérieure ou égale à m. Montrer que α annule les dérivées de P jusqu'à l'ordre $m-1$.
2. Montrer que la réciproque n'est pas forcément vraie, et trouver une condition nécessaire et suffisante sur K pour que la réciproque soit toujours vraie.

Exercice 4.

1. Montrer que si A est intègre, alors sa caractéristique est soit nulle, soit un entier premier. Plus généralement, montrer que si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, alors la caractéristique de B est un diviseur dans $\mathbb{Z}$ de la caractéristique de A.
2. Soient p un nombre premier et A un anneau de caractéristique p. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} Frob_A : A &\to A \\ x &\mapsto x^p \end{aligned}$$

est un endomorphisme de l'anneau A. On l'appelle l'*endomorphisme de Frobenius* de A.

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ un nombre algébrique (c'est-à-dire une racine d'un polynôme non nul de $\mathbf{Q}[X]$). Montrer que le noyau du morphisme $\mathbf{Z}[X] \to \mathbf{C}$ défini par $P(X) \mapsto P(\alpha)$ est un idéal principal.

Exercice 6. [Critère d'Eisenstein]

1. Soit A un anneau factoriel de corps des fractions K et soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in A[X]$ un polynôme à coefficients dans A. Supposons qu'il existe un élément irréductible $p \in A$ tel que :
   i) p ne divise pas a_n ;
   ii) pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, p divise a_k ;
   iii) p^2 ne divise pas a_0.
   Montrer qu'alors P est irréductible dans $K[X]$, et qu'il l'est aussi dans $A[X]$ si l'on suppose de plus que P est primitif.
2. Si p est un nombre premier, montrer l'irréductibilité dans $\mathbb{Z}[X]$ du polynôme $\Phi_p(X) = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$.
3. Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$. Montrer que le polynôme $\sum X_i^2 - 1$ est irréductible dans $K[X_1, \ldots, X_n]$.
4. Soit K un corps de caractéristique $\neq 3$. Montrer que le polynôme $X^3 + Y^3 - 1$ est irréductible dans $K[X, Y]$.

Exercice 7. Soit K un corps infini. Montrer que si $P \in K[X, Y]$ est tel que $\forall x, y \in K, P(x, y) = 0$ alors $P = 0$.