TD n°5 : Anneaux euclidiens et factoriels

Exercice 1. [Questions diverses]

1. Un sous-anneau (respectivement quotient par un idéal premier) d'un anneau factoriel est-il aussi factoriel ?
2. Montrer que si A est un anneau tel que $A[X]$ est principal, alors A est un corps.
3. Soit A un anneau factoriel de corps des fractions K et $P \in A[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que toute racine de P appartenant à K appartient en fait à A.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ n'est pas factoriel.
5. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un anneau euclidien.
6. Trouver les éléments irréductibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.
7. Soient A un anneau factoriel dont le corps de fractions est K, et $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_0 \in A[X]$ un polynôme non-nul. Montrer que si $\frac{p}{q}$ est une racine de P dans K avec $p, q \in A$ et $p \wedge q = 1$, alors $p|a_0$ et $q|a_n$.
8. (*) Soit K un corps. Montrer que l'anneau $K[X,Y]/(X^3 - Y^2 - X)$ n'est pas factoriel. (*Indication : Montrer que l'élément Y est irréductible mais que l'idéal qu'il engendre n'est pas premier.*)
9. (*) Trouver tous les éléments inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Exercice 2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $U_n = \{e^{2ik\pi/n} \mid k \wedge n = 1\}$ l'ensemble des racines de l'unité n-ièmes primitives, et on définit le n-ième polynôme cyclotomique

$$\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in U_n} (X - \zeta) \in \mathbb{C}[X].$$

1. Montrer que le degré de $\Phi_n(X)$ est $\phi(n)$, l'indicatrice d'Euler de n.
2. Montrer que pour tout n on a
$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X),$$
et en déduire la formule $n = \sum_{d|n} \phi(d)$.
3. En déduire que $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$.
4. Pour $n = p$ un nombre premier, calculer explicitement $\Phi_p(X)$ et montrer que celui-ci est irréductible.

Exercice 3. Soit A un anneau factoriel. Soit $a \in A$ un élément non-nul non inversible, qui s'écrit sous la forme $a = up_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, avec $u \in A^*$ et les p_i irréductibles.

1. Montrer que si d divise a, alors d s'écrit sous la forme $d = vp_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, avec $v \in A^*$ et $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.
2. Calculer le nombre d'idéaux principaux distincts (d) qui contiennent l'idéal (a).
3. En déduire que dans l'anneau A toute chaîne croissante d'idéaux principaux est stationnaire.

Exercice 4. Soit A un anneau factoriel. On suppose que pour tous $a, b \in A$, le pgcd de a et b est donné par une relation de Bézout, c'est à dire qu'il existe u, v tels que $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$. Le but de cet exercice est de montrer que A est principal.

1. Montrer que la condition de Bézout équivaut au fait que tout idéal de type fini est principal.
2. Montrer qu'à association près, tout élément de A ne possède qu'un nombre fini de diviseurs.
3. Soit I un idéal et $a \in I$. Montrer que l'ensemble des suites croissantes d'idéaux principaux de la forme $(a) \subset (a_1) \subset (a_2) \subset \ldots (a_n) \subset I$ est finie.
4. En considérant une suite de longueur maximale, montrer que I est principal.

Exercice 5. 1. Soient A un anneau et $S \subset A$ est une partie de A stable par multiplication qui contient 1 mais ne contient pas 0. Notons E_S l'ensemble des idéaux premiers disjoints avec S. Montrer que E_S est non-vide, et que tout élément maximal de E_S est un idéal premier.

2. Montrer qu'un anneau intègre est factoriel si et seulement si tout idéal premier non-nul contient un élément premier.
3. Soit A un anneau factoriel. Montrer que A est principal si et seulement si tout idéal premier non-nul est maximal.

Exercice 6. Soient A un anneau noethérien et $n \in \mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers P de A tels que le cardinal A/P est inférieur ou égal à n.

1. Supposons par l'absurde qu'il y a une infinité de tels idéaux premiers. Montrer que A est infini.
2. Soit I un idéal maximal parmi ceux tels que l'anneau A/I possède une infinité de tels idéaux premiers. Montrer que I est premier.
3. En déduire que l'on peut supposer que A est intègre, et que tout quotient non trivial de A ne possède qu'un nombre fini de tels idéaux premiers.
4. Soient $a_1, \cdots, a_{n+1}$ des éléments distincts de A et $p = \prod_{i<j}(a_i - a_j)$. Montrer que si P est un idéal premier qui ne contient pas p, alors $\#(A/P) > n$.
5. Conclure.

Exercice 7. [Localisation d'un anneau intègre]

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K. Si S est une partie de A stable par multiplication qui contient 1 mais ne contient pas 0, on pose

$$S^{-1}A := \left\{ \frac{a}{s},\ a \in A,\ s \in S \right\} .$$

1. Montrer que $S^{-1}A$ est un sous-anneau intègre de K.
2. Soit $\phi : A \to S^{-1}A$ l'inclusion canonique. Montrer qu'elle vérifie la propriété universelle suivante : pour tout morphisme d'anneaux $f : A \to R$ qui envoie les éléments de S sur des éléments inversibles, il existe un unique morphisme d'anneaux $f' : S^{-1}A \to R$ tel que $f = f' \circ \phi$.
3. Montrer que l'application $I \mapsto \phi^{-1}(I)$ définit une injection des idéaux de $S^{-1}A$ vers ceux de A, qui envoie les idéaux premiers sur des idéaux premiers.
4. Soit $\mathcal{I}(A, S)$ l'ensemble des idéaux de A disjoints avec S. Montrer que si I est un élément maximal de $\mathcal{I}(A, S)$, alors I est un idéal premier. En déduire une autre démonstration de l'Exercice 3.d) du TD 8.
5. Montrer que si A est principal (respectivement factoriel), alors $S^{-1}A$ est principal (respectivement factoriel).
6. En déduire que $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ est un anneau principal.
7. Montrer que si A est euclidien de stathme ν, alors $S^{-1}A$ est euclidien de stathme μ défini par

$$\mu(x) := \inf_{\substack{s \in S \\ sx \in A}} \nu(sx) .$$