TD n°6 : Généralités sur les anneaux

Exercice 1. Montrer que l'anneau $\mathbf{C}[X,Y]/(Y-X^2)$ est principal.

Exercice 2. Soit A un anneau factoriel. On suppose que pour tous $a,b \in A$, le pgcd de a et b est donné par une relation de Bézout, c'est à dire qu'il existe u,v tels que $au+bv = \mathrm{pgcd}(a,b)$. Le but de cet exercice est de montrer que A est principal.

1. Montrer que la condition de Bézout équivaut au fait que tout idéal de type fini est principal.
2. Montrer qu'à association près, tout élément de A ne possède qu'un nombre fini de diviseurs.
3. Soit I un idéal et $a \in I$. Montrer que l'ensemble des suites croissantes d'idéaux principaux de la forme $(a) \subset (a_1) \subset (a_2) \subset \ldots (a_n) \subset I$ est finie.
4. En considérant une suite de longueur maximale, montrer que I est principal.

Exercice 3.
1. Soient A un anneau et $S \subset A$ est une partie de A stable par multiplication qui contient 1 mais ne contient pas 0. Notons E_S l'ensemble des idéaux disjoints avec S. Montrer que E_S est non-vide, et que tout élément maximal de E_S est un idéal premier.
2. Montrer qu'un anneau intègre est factoriel si et seulement si tout idéal premier non-nul contient un élément premier.
3. Soit A un anneau factoriel. Montrer que A est principal si et seulement si tout idéal premier non-nul est maximal.

Exercice 4. Soient A un anneau noethérien et $n \in \mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers P de A tels que le cardinal A/P est inférieur ou égal à n.

1. Supposons par l'absurde qu'il y a une infinité de tels idéaux premiers. Montrer que A est infini.
2. Soit I un idéal maximal parmi ceux tels que l'anneau A/I possède une infinité de tels idéaux premiers. Montrer que I est premier.
3. En déduire que l'on peut supposer que A est intègre, et que tout quotient non trivial de A ne possède qu'un nombre fini de tels idéaux premiers.
4. Soient $a_1, \cdots, a_{n+1}$ des éléments distincts de A et $p = \prod_{i<j}(a_i - a_j)$. Montrer que si P est un idéal premier qui ne contient pas p, alors $\#(A/P) > n$.
5. Conclure.

Exercice 5. [Spectre d'un anneau]

Pour tout anneau A, on note $\operatorname{Spec} A$ l'ensemble des ses idéaux premiers. Pour tout idéal I de A et $V \subset \operatorname{Spec} A$, on note

$$\mathcal{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A | I \subset \mathfrak{p}\} \qquad \mathcal{I}(V) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in V} \mathfrak{p}.$$

(a) Montrer que les fonctions $\mathcal{V}$ et $\mathcal{I}$ sont décroissantes pour l'inclusion, et que pour tous idéaux I et J de A

$$\mathcal{V}(I \cap J) = \mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J).$$

(b) Montrer que pour toute famille d'idéaux $(I_\alpha)_\alpha$ de A et I l'idéal engendré par leur union,

$$\mathcal{V}(I) = \cap_\alpha \mathcal{V}(I_\alpha).$$

(c) Montrer grâce à la question (d) de l'exercice précédent que pour tout idéal I de A,

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}.$$

(d) Dessiner $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ et $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]$.