TD n°7 : Extensions de corps

Exercice 1. [Eléments algébriques]

Soit M/K une extension de corps. Soit L l'ensemble des éléments de M qui sont algébriques sur K.

1. Prouver que L est un corps.
2. Montrer que l'extension L/K est algébrique.

Exercice 2. [Échauffement]

1. Soit L/K une extension de degré n. Que dire si $n = 1$? Que dire d'une sous-extension L'/K de degré n (c'est-à-dire d'un corps L' tel que $K \subset L' \subset L$ et $[L' : K] = n$) ?
2. Soit L/K une extension. Soit $a \in L$ algébrique sur K, de degré n et de polynôme minimal $P \in K[X]$. Soit également $b \in L$ algébrique sur K de degré m. On suppose que m et n sont premiers entre eux. Quel est le degré de $K[a, b]/K$? Montrer que P est irréductible sur $K[b]$. Que vaut $K[a] \cap K[b]$?
3. Soit L/K une extension et $x \in L$ algébrique sur K, de degré impair. Montrer que x^2 est également algébrique sur K et que $K[x^2] = K[x]$.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ possède des extensions de tout degré.
5. Déterminer les extensions finies de $\mathbb{C}$.
6. Montrer que le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ (ensemble des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$) est dénombrable.

Exercice 3. Donner les degrés des extensions suivantes et en donner des bases.

1. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.
2. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Comparer $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ et donner le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.
3. $\mathbb{Q}[j]/\mathbb{Q}$, pour $j = e^{2i\pi/3}$. A-t-on $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[j]$? $i \in \mathbb{Q}[j]$? $j \in \mathbb{Q}[i]$?
4. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, j]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, i, j]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, i]/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{3} + i]/\mathbb{Q}$.
5. $\mathbb{Q}\left[\cos \frac{2\pi}{3}\right]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\left[\sin \frac{2\pi}{3}\right]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\left[\cos \frac{2\pi}{5}\right]/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}\left[\sin \frac{2\pi}{5}\right]/\mathbb{Q}$.

Exercice 4. [Extensions quadratiques]

Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Soit L/K une extension de degré 2 (*extension quadratique*).

1. Soit $P \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré 2. Démontrer qu'il existe $a, b \in K$ tels que $P = (X - a)^2 - b$.
2. Démontrer qu'il existe un élément non nul α de L tel que $\alpha^2 \in K$ et $L = K(\alpha)$.
3. On conserve les notations de la question (b). Soit $\beta \in L$ tel que $L = K(\beta)$ et $\beta^2 \in K$. Montrer que $\beta/\alpha \in K$.
4. En déduire une classification des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$.

Exercice 5. Soit K un corps et $L = K(X)$.

1. L'élément $X \in L$ est-il algébrique sur K ?
2. Montrer que si $\beta \in L \setminus K$, L est algébrique sur $K(\beta)$.

3. Déterminer les éléments de L algébriques sur K.

Exercice 6. Soit $P \in K[X]$ un polynôme de degré 4. Montrer que P est irréductible si et seulement si pour toute extension L/K de degré ≤ 2, P n'a pas de racine dans L. Généraliser ce critère à un polynôme de degré n.

Exercice 7.

1. Montrer que -1 n'est pas une somme de carrés dans $\mathbb{R}$ (!)
2. Soit $\beta = e^{2i\pi/3}\sqrt[3]{2} \in \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{Q}(\beta)$. Montrer que -1 n'est pas une somme de carrés dans K.

Exercice 8. [Extensions biquadratiques] Soient p et q deux nombres premiers distincts.

1. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})/\mathbb{Q}$.
2. Soit $\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ tel que $\beta^2 \in \mathbb{Q}$. Démontrer qu'un des éléments β, $\beta/\sqrt{p}$, $\beta/\sqrt{q}$, $\beta/\sqrt{pq}$ appartient à $\mathbb{Q}$. (On pourra discuter suivant que β appartient à $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ou pas).
3. Donner la liste des sous-extensions de $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})/\mathbb{Q}$.
4. Calculer $(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2$. Déterminer le polynôme minimal de $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ sur $\mathbb{Q}$.