TD n°8 : Extensions de corps (suite) et constructions à la règle et au compas

Exercice 1. (Un nombre de degré 4 qui n'est pas constructible)
Soient P le polynôme $X^4 + X + 1$ et x une racine de P dans $\mathbf{C}$. Le but de l'exercice est de montrer que x n'est pas constructible.

1. Montrer que P est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.
2. Supposons par l'absurde que x est constructible. Montrer qu'il existe une extension finie constructible de $\mathbf{Q}$ dans laquelle P est produit de deux polynômes de degré 2.
3. Montrer que parmi les coefficients de ces deux polynômes on trouve une racine de
$$Q(X) = X^6 - 4X^2 - 1$$
4. Montrer qu'alors dans $\mathbf{Q}[X]$, Q possède un facteur de degré 2. Montrer qu'il est de la forme $X^2 + t$, où $t \in \mathbf{Z}$.
5. Conclure.

Exercice 2. [Trisection de l'angle]

1. Soit θ un nombre réel. Montrer que $2cos(\theta/3)$ est racine de $X^3 - 3X - 2cos(\theta)$.
2. Montrer que l'angle $\pi/3$ n'est pas trisectable à la règle et au compas.

Exercice 3.

1. Soit L/K une extension algébrique. Montrer que si $f : L \to L$ est un morphisme de corps K-linéaire, f est un automorphisme.
2. Soit $K \subset K' \subset K''$ trois corps. On suppose que l'extension K'/K est algébrique. Montrer que tout élément $a \in K''$ algébrique sur K' est algébrique sur K.
3. Montrer que $\overline{\mathbb{Q}}$ est algébriquement clos.
4. Charles Hermite a démontré en 1873 que e est un nombre transcendant sur $\mathbf{Q}$; en 1882, Ferdinand von Lindemann a démontré la même chose pour π. En admettant ces résultats, montrer que $e + \pi$ et $e\pi$ ne peuvent pas être simultanément algébriques sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 4. Soit $\mathbf{F}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ le corps à deux éléments.

1. Déterminer tous les polynômes irréductibles de $\mathbf{F}_2[X]$ de degré inférieur ou égal à 4.
2. Utiliser un polynôme irréductible de degré 3 pour construire une extension $\mathbf{F}_8/\mathbf{F}_2$ de degré 3. Montrer, en exhibant un isomorphisme explicite, que toutes ces extensions sont isomorphes.
3. Montrer que $\mathbf{F}_8^\times$ est cyclique en en exhibant un générateur.
4. Démontrer que tous les éléments de $\mathbf{F}_8$ sont algébriques sur $\mathbf{F}_2$ et donner leur polynôme minimal.
5. Reprendre ces trois dernières questions pour une extension $\mathbf{F}_{16}/\mathbf{F}_2$ de degré 4.

Exercice 5. Soit $P = X^3 + 2X + 2 \in \mathbf{Q}[X]$ et soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P.

1. Montrer que P est irréductible.
2. Exprimer $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2 + a + 1}$ et $u = a^6 + 3a^4 + 2a^3 + 6a$ en fonction de 1, a et a^2.
3. Montrer que u est algébrique sur $\mathbf{Q}$ et déterminer son polynôme minimal.

Exercice 6. Montrer que le polynôme minimal de $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ sur $\mathbb{Q}$ est réductible dans $\mathbf{F}_p[X]$ pour tout nombre premier p.