Devoir maison n°1

Exercice 1. [Groupes monogènes, groupes cycliques]

Un groupe est dit monogène s'il est engendré par un seul élément. On dit qu'il est cyclique s'il est monogène et fini.

(a) Montrer qu'un groupe monogène est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un entier $n \geq 1$.

(b) Trouver tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer en particulier qu'ils sont monogènes.

(c) Montrer que pour tout $d \geq 1$ divisant n, il existe un unique sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d.

(d) Trouver les générateurs de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En déduire leurs automorphismes.

(e) Soit φ l'indicatrice d'Euler définie par $\varphi(m) = \#\{d \in \mathbb{N}^*|\ d \leq m \text{ et } \mathrm{pgcd}(d,m) = 1\}$. Démontrer la relation : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

(f) Soit G un groupe fini d'ordre n tel que, pour tout diviseur d de n, G contienne au plus un sous-groupe cyclique d'ordre d. Montrer que G est cyclique.

(g) *Application :* Soit K un corps (commutatif) et G un sous-groupe fini du groupe multiplicatif $K^\times$. Montrer que G est cyclique.

Exercice 2. [Formule de Burnside et applications]

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Pour tout $g \in G$, on note $X^g = \{x \in X|\ gx = x\}$ l'ensemble de points fixes de g dans X.

(a) Montrer la formule de Burnside qui permet de calculer le nombre N d'orbites :

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Card}(X^g).$$

Indication : On pourra considérer l'ensemble $\{(x,g) \in X \times G|\ gx = x\}$.

(b) Si l'action est transitive et $\mathrm{Card}(X) \geq 2$, montrer qu'il existe un $g \in G$ agissant sans point fixe.

(c) Montrer qu'un groupe fini n'est jamais l'union des conjugués d'un sous-groupe strict.

(d) Calculer le nombre de colliers distincts à 6 perles si chaque perle peut prendre trois couleurs différentes (les colliers sont égaux si l'un peut être obtenu de l'autre par rotation).

(e) La même question que (d) mais maintenant les colliers sont égaux si l'un peut être obtenu de l'autre par rotation et symétrie axiale (ce qui ressemble plus à ce à quoi on peut s'attendre en pratique...). Soyez vigilants : maintenant le groupe associé à ce problème a deux sortes de symétries qui n'ont pas le même nombre de points fixes !

On suppose maintenant que G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Chaque $g \in G$ non trivial a un axe de rotation unique qui intersecte la sphère unité en deux points, et on définit X l'ensemble de ces points.

(f) Montrer que G agit sur X (qu'il s'agit d'une action).

(g) Soit N le nombre d'orbites de l'action. Montrer que

$$N = \frac{|X|}{|G|} + 2 - \frac{2}{|G|}.$$

En déduire que $N = 2$ ou 3.

(h) Si $N = 2$, montrer que G est cyclique.

(i) Si $N = 3$ et qu'on choisit des représentants x_1, x_2, x_3 des orbites (classées par cardinal croissant), montrer que les cardinaux des stabilisateurs sont de la forme $(2,2,n)$ avec n quelconque, $(2,3,3)$, $(2,3,4)$ ou $(2,3,5)$.

(j) Montrer que les différentes classes détectées aux deux questions précédentes existent vraiment, c'est-à-dire donner les ensembles X et les sous-groupes correspondants avec les propriétés (h) et (i).