ENS Lyon
L3

Algèbre 1
2016-2017

DM N°2. CORRIGÉ.

Exercice 1. [Caractères du groupe des quaternions] Soit $Q = \{\pm 1, \pm x, \pm y, \pm z\}$ le groupe des quaternions, avec $x^2 = y^2 = -1$ et $xy = -yx = z, zx = -xz = y, yz = -zy = x$.

1. Calculer le nombre de classes de conjugaison dans Q.
2. On considère le sous-groupe $K = \{\pm 1\}$. Montrer que K est distingué dans Q.
3. Montrer que le groupe Q/K a 4 caractères irréductibles et que chacun peut définir un caractère irréductible de Q.
4. Montrer qu'il existe un seul caractère irréductible supplémentaire de Q et que ce dernier est de degré 2. Montrer que la représentation correspondante ρ admet la représentation matricielle :
$$\rho(x) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \rho(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \rho(z) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$
5. Donner la table des caractères de Q.
6. Comparer cette table avec la table des caractères du groupe diédral D_8, groupe d'ordre 8 engendré par deux éléments σ et τ tel que $\sigma^4 = 1, \tau^2 = 1$ et $\tau\sigma\tau = \sigma^3$.

Solutions.

1. Comme les élements 1 et -1 commutent avec tous les elements du groupe, il forment chacun une classe de conjugaison de taille 1. La taille des autres classes de conjugaison doit diviser 8 et la somme des éléments dans toutes les classes restantes doit être 6. Comme $\pm x$ sont dans la même classe $(-yxy = -x)$ ainsi que $\pm y$ et $\pm z$ par symétrie nous avons $\{1\}, \{-1\}, \{\pm x\}, \{\pm y\}, \{\pm z\}$.
2. Ceci découle évidemment du fait que ce sous-groupe est le centre du groupe des quaternions : $K = Z(Q)$.
3. Le groupe $Q/K =: V$ a quatre elements et est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. V est le groupe abélien de Klein, ses éléments forment chacun une classe de conjugaison. Ce groupe a 4 représentations irreductibles de dimensions 1 : la représentation triviale, et trois représentations qui ont pour noyau $\{[1], [x]\}$, $\{[1], [y]\}$ et $\{[1], [z]\}$ respectivement. La première d'elles envoie $[1], [x]$ dans une matrice id et $[y], [z]$ dans une matrice $-$id. Les autres sont définies de la façon analogue. Comme $1^2 + \ldots + 1^2 = 4$, il n'y a pas d'autres représentations irreductibles.
   Les caractères irreductibles de Q/K sont alors les suivants :

Caractère et sa valeur sur les éléments de V	$< e >$	$< x >$	$< y >$	$< z >$
χ_{triv}	1	1	1	1
$\chi_{<x>}$	1	1	-1	-1
$\chi_{<y>}$	1	-1	1	-1
$\chi_{<z>}$	1	-1	-1	1

   Ces représentations donnent les représentations correspondantes du groupe Q initial juste en choisissant l'application linéaire sur les classes de conjugaison correspondantes aux éléments $e, -e, x, y, z$ de la façon indiquée par les caractères de Q/K. De cette façon, évidemment on définit la représentation (un homomorphisme). La nouvelle table de caractères est :

Caractère et sa valeur sur les classes de conjugaison	$< e >$	$< -e >$	$< x >$	$< y >$	$< z >$
χ_{triv}	1	1	1	1	1
$\chi_{<x>}$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{<y>}$	1	1	-1	1	-1
$\chi_{<z>}$	1	1	-1	-1	1

   Toutes ces représentations sont différentes parce que leurs caractères sont différents.

4. Nous avons trouvé 4 caractères irreductibles, alors il ne reste qu'un (parce qu'il y a 5 classes de conjugaison). Sa dimension d peut être calculée grâce à la formule des sommes des carrés des dimensions : $1^2+1^2+1^2+1^2+d^2=|G|=8$ alors $d=2$. Notons cette représentation (ρ, V). Alors par le lemme de Schur $\rho(-1)=\pm\mathrm{id}$ et ceci ne peut pas être id parce qu'en ce cas ρ aura un cotient qui donnera une représentation de Q/K, son quotient abélien : ces représentations sont unidimensionelles. Supposons que $e_1 \in V$ est un vecteur propre pour $\rho(x)$ avec la valeur propre $\lambda, \lambda^2=-1$. Comme $\rho(x)\rho(y)=-\rho(y)\rho(x)$ alors $\rho(y)e_1=: e_2 \in V$ est aussi un vecteur propre pour $\rho(x)$. En echangeant e_1 et e_2 si nécessaire on peut supposer $\lambda=i$. Aussi, $\rho(y)e_2=-e_1$. Alors e_1, e_2 - base de V dans laquelle $\rho(x)$ et $\rho(y)$ sont données par les matrices $\rho(x)=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \rho(y)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. En calculant $\rho(x)\rho(y)$, on obtient la matrice $\rho(z)$. Alors chaque représentation 2-dimensionelle s'écrit dans cette forme dans une certaine base. Il reste à prouver que ces trois matrices définissent la représentation de Q (calcul).
5. Il nous reste de calculer le caractère de la seule représentation bidimensionelle. Comme nous avons explicitement cette représentation, le calcul se fait facilement : $\chi_2(<e>)=2, \chi_2(<-e>)=-2, \chi_2(<x>)=\chi_2(<y>)=\chi_2(<z>)=0$.
6. Le groupe D_8 possède 5 classes de conjugaison, deux formés par les symmétries $\{\tau, \sigma^2\}, \{\sigma\tau, \sigma^3\tau\}$ et trois par rotations $\{e\}, \{\sigma, \sigma^3\}, \{\sigma^2\}$. Elle possède 4 caractères irreductibles de dimension 1 donnés par les valeurs ($+1$ ou -1) sur σ et τ. Et elle possède une représentation irreductible de dimension 2 donné par
$\rho(\sigma)=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \rho(\tau)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Son caractère est 0 sur toutes les classes de conjugaison sauf $\chi_\rho(e)=2$ et $\chi_\rho(\sigma^2)=-2$. Cela donne que les groupes D_8 et Q ont exactement les mêmes tables des caractères mais ils ne sont pas isomorphes ! (Q a 6 éléments d'ordre 4 et D_8 n'en a que deux : σ et σ^{-1}).

Exercice 2. [L'analyse et les formes bilinéaires] Pour tout corps K et tout ensemble E, on note $K[E]$ le K-espace vectoriel $\oplus_{x\in E} K \cdot e_x$, i.e. tout élément de $K[E]$ est de la forme $\sum_{x\in I} a_x e_x$, où I est un sous-ensemble fini de E, $a_x \in K$ et e_x est un symbole formel.

1. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}[\mathbb{R}] \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (\sum_{x\in I} a_x e_x, f) &\mapsto \sum_{x\in I} a_x f(x) \end{aligned}$$
est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire, telle que $\mathbb{R}[\mathbb{R}]^\perp = 0$ et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})^\perp = 0$.
2. Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles fermés bornés de la forme $[a,b]$ avec $a<b$. Considérons l'application
$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}[\mathcal{I}] \times \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (\sum_{[a,b]\in I} a_{[a,b]} e_{[a,b]}, f) &\mapsto \sum_{[a,b]\in I} a_{[a,b]} \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$
   (a) Montrer que ψ est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}[\mathcal{I}]^\perp = 0$.
   (c) Montrer que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})^\perp$ n'est pas réduit à 0 et exhiber un élément non-nul du noyau.
3. Soit D l'application suivante :
$$\begin{aligned} D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f'. \end{aligned}$$
   (a) Montrer que D est $\mathbb{R}$-linéaire et surjective.

(b) Montrer qu'il existe une unique application $\mathbb{R}$-bilinéaire

$$D^* : \mathbb{R}[\mathcal{I}] \to \mathbb{R}[\mathbb{R}]$$

tel que pour tout $X \in \mathbb{R}[\mathcal{I}]$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a

$$\phi(D^*(X), f) = \psi(X, D(f)),$$

et donner l'expression de D^* sur les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}[\mathcal{I}]$.

(c) Montrer que le noyau de D^* s'identifie à l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^\perp$ de la question 2c.

Solutions.

1. La bilinéarité se montre facilement. Maintenant, si $f \in \mathbb{R}[\mathbb{R}]^\perp$, alors pour $x \in \mathbb{R}, f(x) = \phi(e_x, f) = 0$ et donc $f = 0$. Si $\sum_{x \in I} a_x e_x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})^\perp$, alors pour $x_0 \in I$, il existe $f_{x_0} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(x_0) = 1$ et $f(y) = 0$ pour $y \in I \backslash \{x_0\}$ et donc $\phi(\sum_{x \in I} a_x e_x, f_x) = a_{x_0} = 0$ et donc les a_x sont tous nuls, donc $\sum_{x \in I} a_x e_x = 0$.
2. (a) La bilinéarité se montre facilement.
   (b) Soit $f \in \mathbb{R}[\mathcal{I}]^\perp$. Si $f \neq 0$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$ et, quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer $f(x) > 0$. Par continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que f est strictement positive sur $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, et donc $\phi(e_{[x-\varepsilon, x+\varepsilon]}, f) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)dt > 0$. Donc $\mathbb{R}[\mathcal{I}]^\perp = 0$.
   (c) Par la relation de Chasles, $\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall a < c < b, \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, de telle sorte que $e_{[a,b]} - e_{[a,c]} - e_{[c,b]} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^\perp \setminus \{0\}$.
3. (a) Là encore, la bilinéarité est directe. De plus, si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est bien définie et $\mathcal{C}^1$, et $F'(x) = D(f)(x) = f(x)$, d'où la surjectivité.
   (b) Pour l'existence, on écrit simplement que

$$\begin{aligned} \psi(X, D(f)) &= \psi(\sum a_{[a,b]} e_{[a,b]}, D(f)) \\ &= \sum a_{[a,b]} \int_a^b f'(x)dx \\ &= \sum a_{[a,b]}(f(b) - f(a)), \end{aligned}$$

   de telle sorte que D^* définie par $D^*(e_{[a,b]}) = e_b - e_a$ convient. L'unicité vient du fait que si D^*, $D^{*'}$ conviennent alors pour $X \in \mathbb{R}[\mathcal{I}]$, $(D^* - D^{*'})(X) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})^\perp$ pour ϕ, et donc $D^*(X) = D^{*'}(X)$ pour tout X.
   (c) Comme $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})^\perp$ pour ϕ,

$$\begin{aligned} X \in Ker D^* &\Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \phi(D^*(X), f) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \psi(X, D(f)) = 0 \\ &\Leftrightarrow X \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^\perp \text{ par surjectivité de } D. \end{aligned}$$