ENS Lyon — Algèbre 1

L3 — 2016-2017

TD 0 : Révisions

Exercice 1. [Image directe, image réciproque] Soit $f : E \to F$ une application.

1. – Montrer que pour toute partie B de F, $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$.
   – Montrer que pour toute famille de parties $(B_i)_{i\in I}$ de F, $f^{-1}(\cap_{i\in I}(B_i)) = \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
   – Montrer que pour toute famille de parties $(B_i)_{i\in I}$ de F, $f^{-1}(\cup_{i\in I}(B_i)) = \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
2. Qu'en est-il pour l'image directe ? À chaque fois, démontrer le résultat ou exhiber un contre-exemple.

Exercice 2. [Fonctions injectives et surjectives] Soit $f : E \to F$ une application.

(a) Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie X de E, $f^{-1}(f(X)) = X$.

(b) Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie Y de F, $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

(c) Montrer que si la composée $g \circ h$ est surjective (resp. injective) alors g est surjective (resp. h est injective).

(d) Montrer que f est injective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

(e) Montrer que f est injective si et seulement si pour toutes applications $g, h : G \to E$, on a $f \circ g = f \circ h$ si et seulement si $g = h$.

(f) Montrer que f est surjective si et seulement si pour toutes applications $g, h : F \to G$, on a $g \circ f = h \circ f$ si et seulement $g = h$.

(g) Montrer que toute fonction f peut s'écrire comme composée $f = g \circ h$, où g est surjective et h injective, ou comme composée $f = g \circ h$ où g est injective et h surjective.

Exercice 3. [Dénombrabilité] On rappelle qu'un ensemble est dit dénombrable s'il existe une bijection entre cet ensemble et une partie de $\mathbf{N}$.

1. Montrer qu'un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
2. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
3. Montrer que $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}^d$, $\mathbf{Q}$ sont dénombrables.
4. Montrer que $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 4. [Bijections naturelles]

(a) Pour tout ensemble E, donner une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$.

(b) Pour tous ensembles E et F, donner une bijection entre $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{F}(E, \mathcal{P}(F))$.

Exercice 5. [Théorème de Cantor]

Soit E un ensemble quelconque.

(a) Si E est fini de cardinal n, quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$? En déduire qu'ils ne peuvent être en bijection.

(b) Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application quelconque. On note

$$F = \{x \in E | x \notin f(x)\}.$$

Montrer que F n'est l'image d'aucun élément de E par f.

(c) En déduire qu'il n'existe aucune surjection de E vers $\mathcal{P}(E)$, en particulier aucune bijection.

Exercice 6. [Théorème de Cantor-Bernstein *]

Soient E et F deux ensembles tels qu'il existe deux injections $f : E \to F$ et $g : F \to E$. Le but de cet exercice est de démontrer que E et F peuvent être mis en bijection.

(a) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties C de E telles que $g(F \backslash f(C)) \subset E \backslash C$. Montrer qu'il est non vide, et que l'union E_0 des éléments de $\mathcal{E}$ appartient également à $\mathcal{E}$.

(b) On pose maintenant $E_1 = E \backslash g(F \backslash f(E_0))$. Montrer que $E_0 \subset E_1$.

(c) Pour $y \in F$ tel que $g(y) \in E_1$, montrer que $y \in f(E_0)$ donc $y \in f(E_1)$. En déduire que $E_1 \in \mathcal{E}$, puis que $E_0 = E_1$.

(d) On introduit la fonction $h : E \to F$, qui à x associe $f(x)$ si $x \in E_0$, et $g^{-1}(x)$ (l'unique antécédent de x par g) si $x \notin E_0$. Montrer que h est bien définie.

(e) Montrer que h est surjective.

(f) Montrer que h est injective, et en déduire que E et F sont en bijection.

Exercice 7. [Quelques constructions]

1. Montrer que $]0, 1[$ et $\mathbf{R}$ sont en bijection.
2. Montrer que $]0, 1[$ et $[0, 1]$ sont en bijection.
3. Montrer que $[0, 1]$ et $[0, 1]^2$ sont en bijection.