ENS Lyon L3 Algèbre 1 2016-2017

TD n°1 : Relations d'équivalence et groupes

Exercice 1. On définit la relation $|$ sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$

$$n|m \iff \exists k \in \mathbb{N}, m = nk$$

(a) Montrer que $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. Est-ce un ordre total ?
(b) Montrer que $\mathbb{N}$ muni de cet ordre admet un plus petit élément et un plus grand élément.

Exercice 2. Prouver que ces relations sont des relations d'équivalence.
(a) Pour $k, l \in \mathbb{Z}$: $k \equiv l \mod n$ si $k - l$ se divise par n.
(b) Deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ sont semblables si il existe une matrice P inversible telle que $A = P^{-1}BP$.
(c) Deux matrices $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ sont équivalentes si il existe deux matrices inversibles $P \in M_m(\mathbb{F}), Q \in M_n(\mathbb{F})$ telles que $A = QBP^{-1}$.
(d) Deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ sont congruentes si il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{F})$ telle que $B = P^T AP$.
(e) Deux matrices sont $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sont unitairement équivalentes si il existe une matrice unitaire $U \in M_n(\mathbb{C})$ ($UU^* = U^*U = I$) telle que $A = UBU^{-1}$.

Exercice 3. [Factorisation d'une application]
Soit $f : E \to F$ une application.
(a) Montrer que la relation binaire $\sim$ définie sur E par $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence.
(b) Montrer que pour $\pi : E \to E/\sim$ la projection canonique, il existe une unique application $\overline{f} : E/\sim \to F$ telle que $f = \overline{f} \circ \pi$, et que celle-ci est injective. En déduire que $E/\sim$ est en bijection avec $\mathrm{im}(f)$.

Exercice 4. [Espaces vectoriels quotients]
Soit E un k-espace vectoriel, avec k un corps commutatif et F un sous-espace vectoriel de E.
(a) Montrer que la relation binaire $\sim$ définie sur E par $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in F$ est une relation d'équivalence, on note son quotient E/F.
(b) Montrer que le quotient E/F a une unique structure de k-espace vectoriel telle que la projection canonique $\pi : E \to E/F$ est une application linéaire.
(c) Si G est un supplémentaire de F dans E, montrer qu'il existe un isomorphisme linéaire entre G et E/F. En déduire la dimension de E/F lorsque E est de dimension finie.
(d) Soit $f : E \to H$ une application linéaire, $\dim E < \infty$. Rappelons que son rang est la dimension de son image $\mathrm{rg} f := \dim \mathrm{Im} f$. Prouver que $\mathrm{rg} f = \dim E - \dim \mathrm{Ker} f$.
(e) Pour toute application linéaire $f : E \to H$, montrer que f se factorise en $f = \overline{f} \circ \pi$ si et seulement si f est nulle sur F.

Exercice 5. (a) Compter le nombre de partitions (donc de relations d'équivalence) sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.
(b) Soit B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments distincts (un nombre de Bell). Prouver que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$.

Exercice 6. Est-ce que ces ensembles avec ces lois de compositions sont des groupes ?

(a) $(\mathbb{Z}, +)$

(b) $(\mathbb{Z}, \times)$

(c) $(\mathbb{C}^*, \times)$

(d) $(\mathbb{C}^*, +)$

(e) $(\{-1, 1\}, \times)$

(f) L'ensemble des rotations du plan de centre 0 et la loi de composition des applications

(g) Les matrices $M_n(\mathbb{F})$ avec la loi de composition - produit des matrices

(h) Les applications affines $x \mapsto ax + b, x \in \mathbb{R}$ avec la loi de composition des applications

(i) Soit $G =]-1, 1[$. Pour $x, y \in G$ on définit $x * y := \frac{x+y}{1+xy}$.

Exercice 7. Est-ce qu'il existent les parties génératrices finies pour les groupes :

(a) $(\mathbb{Z}, +)$

(b) $(\mathbb{Z}^2, +)$

(c) $(\mathbb{Q}, +)$

(d) $(\mathbb{Q}^*, \times)$?

Exercice 8. Donner un exemple de sous-groupe H de G tel que xH est différent de Hx pour au moins un x.

Exercice 9. [Sous-groupes de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$] Montrer que $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, +)$ possède un unique sous-groupe d'ordre n pour tout $n \geq 1$ et que ce groupe est cyclique.

Exercice 10. Quels sont des groupes qui n'ont qu'un nombre fini de sous-groupes ?

Exercice 11. [Sous-groupes d'un groupe de type fini] On considère les matrices $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on note G le sous-groupe de $GL_2(\mathbf{R})$ qu'elles engendrent.

(a) Pour $n \in \mathbf{Z}$, calculer $X^{-n}YX^n$. On note H_n le sous-groupe de $GL_2(\mathbf{R})$ engendré par cet élément.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, H_n est strictement inclus dans H_{n+1}.

(c) Exhiber un sous-groupe de G qui est strictement inclus dans un de ses conjugués.

(d) Exhiber un sous-groupe de G qui ne peut pas être engendré par un nombre fini d'éléments.

Exercice 12. [Ordre du produit de deux éléments] Soient G un groupe et x et y des éléments de G.

(a) Montrer que xy et yx ont même ordre (éventuellement infini).

(b) On suppose que x et y commutent et sont d'ordre fini. Montrer que G contient un élément dont l'ordre est le ppcm des ordres de x et y.

Indication : on pourra commencer par le cas où ces ordres sont premiers entre eux.