ENS Lyon | Algèbre 1
L3 | 2016-2017

TD n°10 : Formes quadratiques

Exercice 1. [Identité du parallélogramme] Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit $q : E \to \mathbf{R}$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall x, y \in E, q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y)).$$

On pose pour $x, y \in E, b(x, y) = \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}$.

1. Montrer que b est symétrique.
2. Montrer que b est additive à droite, i.e. que

   $$\forall x, y, z \in E, b(x, y+z) = b(x, y) + b(x, z).$$

   On pourra appliquer la formule de départ aux couples $(x, y+z), (x+y, z), (x+z, y)$ et (y, z).
3. Montrer que $q(x) = b(x, x)$ pour tout $x \in E$.
4. Montrer que b est bilinéaire et que q est une forme quadratique.

Exercice 2. [Algorithme de Gauss]

Appliquer l'algorithme de Gauss aux formes quadratiques suivantes :

1. $q(x, y, z) = xy + xz + yz$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2) + xt + xz + zt$ sur $\mathbb{R}^4$.
3. La forme quadratique déterminant sur $M_2(\mathbb{R})$.

Pour chacune d'entre elles, en déduire la signature et le rang.

Exercice 3. On prend $E = F = \mathbb{K}^2$. Caractériser, dans la base (canonique) des $e_i \otimes e_j$, l'ensemble des $x \otimes y$.

Exercice 4. Soit f_1 et f_2 définies sur $M_n(\mathbb{R})$ par $f_1(A) = \mathrm{Tr}(A)^2$ et $f_2(A) = \mathrm{Tr}({}^tAA)$. Montrer que $f_{1,2}$ sont des formes quadratiques. Sont-elles positives ? définies positives ?

Exercice 5. Soit A et B deux formes quadratiques sur $E = \mathbb{R}^3$ d 'finies par :

$$A(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xz, \quad B(x, y, z) = 2y^2 - 3z^2 + 2xz\,.$$

Trouver une base de E dans laquelle A et B sont diagonales.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$. Pour $P \in E$ on pose $Q(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k)P(-k)e^{-k}$.

1. Montrer que Q est une forme quadratique.
2. Soit $F \subset E$ le sous-espace vectoriel des polynômes paires et $G \subset E$ le sous-espace vectoriel dont les élémentes sont les polynômes impairs. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
3. Montrer que F et G sont orthogonaux pour B - la forme polaire de Q.
4. En étudiant la restriction de Q sur les sous-espaces F et G montrer que Q est non dégénérée et calculer sa signature.