Groupes distingués

Exercice 1 a) Démontrer que le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ est engendré par $\sigma = (1\,2\,3)$ et $\tau = (1\,2)$.
b) Soit $H =< \tau >= \{e, \tau\}$. Calculer les classes à droite et à gauche de S_3 modulo H.
c) Le sous-groupe $N =< \sigma >= \{e, \sigma, \sigma^2\}$, est-il distingué ?

Exercice 2 Soit G un groupe et Z son centre.
a) Démontrer que si H est un sous-groupe de Z, alors H est distingué dans G
b) Démontrer que G/Z est cyclique ssi G est abélien.

Exercice 3 On définit sur l'ensemble des triplets de $\mathbb{Z}^3$ le produit :

$$(k_1, k_2, k_3) * (l_1, l_2, l_3) = (k_1 + (-1)^{k_3} l_1, k_2 + l_2, k_3 + l_3)$$

Démontrer que $G = (\mathbb{Z}^3, *)$ est un groupe et que $H =< (1, 0, 0) >$ est distingué.

Exercice 4 a) Soit G un groupe, $N \triangleleft G$ et $C(N; G)$ est le centralisateur de N dans G. Montrer que $C(N; G) \triangleleft G$.
b) Soit $H \leq G$. On dit que H est un sous-groupe *spécial* si $\forall x, y \in G, x \notin H$ il existe un unique $u \in H$ tel que $y^{-1}xy = u^{-1}xu$. Démontrer que $H \triangleleft G$.

Actions

Exercice 5 Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini E.
a) Supposons que l'action de G n'ait pas de points fixes. On suppose également que $|G| = 15$ et $\mathrm{Card}(E) = 17$. Determiner le nombre d'orbites et la longueur de chacune.
b) Démontrer que si $|G| = 33$ et $\mathrm{Card}(E) = 19$ alors il existe une orbite de longueur 1.
c) Démontrer que $G = GL_2(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe à $\mathcal{S}_3$. On étudie l'action naturelle de G sur $\mathbb{F}^2$.

Exercice 6 [Petit théorème de Fermat]
Soient p un nombre premier et E un ensemble de cardinal a. On fait opérer $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ à gauche sur E^p par l'action

$$\overline{k} \cdot (e_1, \cdots, e_p) = (e_{\omega(k+1)}, \cdots, e_{\omega(k+p)}).$$

où $\omega(i)$ est le représentant dans $\{1, \cdots, p\}$ de la classe de i modulo p. En utilisant la formule des classes, montrer que $a^p \equiv a \mod p$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 7 Combien y a-t'il de colliers distincts à 5 perles si chaque perle peut avoir trois couleurs différentes ?

Exercice 8 (Ping-Pong de Klein) Soit G un groupe qui opère sur un ensemble E et et soient G_1 et G_2 deux sous-groupes non triviaux de G. On suppose que G_1 possède au moins 3 éléments. Soient E_1, E_2 deux parties non-vides de E telles que :

$$E_2 \cap E_1 = \emptyset; \quad \forall g \in G_1 \setminus \{1\}, \quad g \cdot E_2 \subset E_1\,; \quad \forall g \in G_2 \setminus \{1\}, \quad g \cdot E_1 \subset E_2$$

a) Montrer que tout mot réduit (i.e sans occurrence d'un sous-produit de la forme $g\,g^{-1}$) écrit à partir d'éléments de G_1 et de G_2 est différent de l'identité.
(b*) Etudier des groupes cycliques engendrés respectivement par les homographies $\tau_1(z) = (-3z + 8)(z-3)^{-1}$ et $\tau_2(z) = (-3iz - 10)(z - 3i)^{-1}$ avec $E = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (groupe de Schottky).