ENS Lyon Algèbre 1
L3 2016-2017

TD n°3 : p-groupes, théorèmes de Sylow, groupe symétrique

Exercice 1. [Premiers résultats sur le groupe symétrique]

1. Soit $\sigma = (i_1\ i_2 \dots\ i_r)$ un cycle dans $\mathcal{S}_n$, et soit τ un élément de $\mathcal{S}_n$. Calculer $\tau^{-1}\sigma\tau$.
2. Montrer que les $(1\ j)$, $j \in \{2, \dots, n\}$ engendrent $\mathcal{S}_n$.

Exercice 2. [Centre d'un p-groupe]
Soient p un nombre premier et G un p-groupe, de cardinal p^α avec $\alpha \geqslant 1$.

1. On sait d'après le cours que le centre de G n'est pas trivial. Montrer par récurrence que G contient pour tout $i \in \{0, \cdots, \alpha\}$, un sous-groupe distingué d'ordre p^i.
2. Montrer qu'un groupe de cardinal p^2 est toujours abélien.
3. Soit H un sous-groupe distingué non trivial de G. Montrer que l'intersection de H avec le centre de G est non-trivial.
4. Soit maintenant G un groupe quelconque et p un nombre premier tels que tout élément de G est d'ordre une puissance de p. Montrer que le centre d'un tel groupe peut être trivial.

Exercice 3. [Exemples de Sylow]

1. Soit p un nombre premier. Trouver tous les p-Sylow du groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$.
2. Montrer qu'il n'y a pas de groupe simple d'ordre 200. [1]
3. Combien d'éléments d'ordre 5 y a-t-il dans un groupe d'ordre 20 ?
4. Trouver tous les sous-groupes de Sylow du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ et du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
5. Soient G un groupe et p et q deux nombres premiers distincts. Montrer que l'intersection d'un p-Sylow de G avec un q-Sylow de G est triviale.
6. Soient G un groupe, H un sous-groupe de G et P_1 un p-Sylow de H. Montrer qu'il existe un p-Sylow P de G tel que $P_1 = P \cap H$.
7. Soient G un groupe et H un p-sous-groupe de G qui est distingué dans G. Montrer que H est contenu dans tout p-Sylow de G.
8. Soient G un groupe et N un sous-groupe distingué de G qui contient un p-Sylow de G. Montrer que N possède autant de p-Sylow que G.
9. (Argument de Frattini) Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et S un p-Sylow de H. Montrer que $G = N_G(S)H$.

Exercice 4. [Applications du théorème de Sylow]

1. Soit G un groupe d'ordre 12. Montrer que soit G possède un 3-Sylow distingué, soit G est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
2. Soit G un groupe d'ordre 56. Montrer que G possède un sous-groupe de Sylow distingué.
3. Soit G un groupe d'ordre 105. Montrer que G possède soit un 5-Sylow distingué soit un 7-Sylow distingué.
4. Soit G un groupe d'ordre 351. Montrer que G possède un sous-groupe de Sylow distingué.
5. Soit G un groupe d'ordre 340. Montrer que G possède un sous-groupe cyclique distingué d'ordre 85.

1. Rappelons qu'un groupe est dit **simple** s'il ne contient aucun sous-groupe distingué propre non trivial.

6. Soit G un groupe d'ordre 48. Montrer que G possède un sous-groupe distingué d'ordre 8 ou 16.
7. Soit G un groupe simple d'ordre 168. Calculer le nombre d'éléments d'ordre 7.

Exercice 5. [Groupes d'ordre pq, cas simple]
Soient p et q deux nombres premiers tels que $p < q$.

1. Montrer que tout groupe d'ordre pq possède un q-Sylow distingué.
2. Montrer que si de plus p ne divise pas $q-1$, alors tout groupe d'ordre pq est cyclique.
3. Montrer que tout groupe d'ordre p^2q possède un sous-groupe de Sylow distingué.
4. Soit $r > q$ un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre pqr possède un r-Sylow distingué.

Exercice 6. Soit G un groupe simple d'ordre 60.

1. Montrer que tout sous-groupe propre de G est d'indice $\geqslant 5$ dans G.
   Indication : si H est un sous-groupe de G, considérer l'action de G sur G/H.
2. Montrer que le nombre de 2-Sylow dans G vaut 5 ou 15.
3. Supposons que G possède exactement 15 2-Sylow. Montrer que G possède deux 2-Sylow d'intersection non triviale H. Montrer que $N_G(H)$ est d'indice 5 dans G.
4. Montrer que dans tous les cas G possède un sous-groupe d'indice 5. En déduire que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.