ENS Lyon **Algèbre 1** **2016**
Département de Mathématiques **TD 4**
et Informatique

Exercice 1 [Exemples de Sylow]

1. Soit p un nombre premier. Trouver tous les p-Sylow du groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$.
2. Montrer qu'il n'y a pas de groupe simple d'ordre 200. [1]
3. Combien d'éléments d'ordre 5 y a-t-il dans un groupe d'ordre 20?
4. Trouver tous les sous-groupes de Sylow du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ et du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
5. Soient G un groupe et p et q deux nombres premiers distincts. Montrer que l'intersection d'un p-Sylow de G avec un q-Sylow de G est triviale.
6. Soient G un groupe, H un sous-groupe de G et P_1 un p-Sylow de H. Montrer qu'il existe un p-Sylow P de G tel que $P_1 = P \cap H$.
7. Soient G un groupe et H un p-sous-groupe de G qui est distingué dans G. Montrer que H est contenu dans tout p-Sylow de G.
8. Soient G un groupe et N un sous-groupe distingué de G qui contient un p-Sylow de G. Montrer que N possède autant de p-Sylow que G.
9. (Argument de Frattini) Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et S un p-Sylow de H. Montrer que $G = N_G(S)H$.

Exercice 2 [Applications du théorème de Sylow]

1. Soit G un groupe d'ordre 12. Montrer que soit G possède un 3-Sylow distingué, soit G est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
2. Soit G un groupe d'ordre 56. Montrer que G possède un sous-groupe de Sylow distingué.
3. Soit G un groupe d'ordre 105. Montrer que G possède soit un 5-Sylow distingué soit un 7-Sylow distingué.
4. Soit G un groupe d'ordre 351. Montrer que G possède un sous-groupe de Sylow distingué.
5. Soit G un groupe d'ordre 340. Montrer que G possède un sous-groupe cyclique distingué d'ordre 85.
6. Soit G un groupe d'ordre 48. Montrer que G possède un sous-groupe distingué d'ordre 8 ou 16.
7. Soit G un groupe simple d'ordre 168. Calculer le nombre d'éléments d'ordre 7.

Exercice 3 [Groupes d'ordre pq, cas simple]
Soient p et q deux nombres premiers tels que $p < q$.

1. Montrer que tout groupe d'ordre pq possède un q-Sylow distingué.

---

[1] Rappelons qu'un groupe est dit **simple** s'il ne contient aucun sous-groupe distingué propre non trivial.

2. Montrer que si de plus p ne divise pas $q-1$, alors tout groupe d'ordre pq est cyclique.

3. Montrer que tout groupe d'ordre p^2q possède un sous-groupe de Sylow distingué.

4. Soit $r > q$ un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre pqr possède un r-Sylow distingué.

Exercice 4 Soit G un groupe simple d'ordre 60.

1. Montrer que tout sous-groupe propre de G est d'indice $\geqslant 5$ dans G.

   Indication: si H est un sous-groupe de G, considérer l'action de G sur G/H.

2. Montrer que le nombre de 2-Sylow dans G vaut 5 ou 15.

3. Supposons que G possède exactement 15 2-Sylow. Montrer que G possède deux 2-Sylow d'intersection non triviale H. Montrer que $N_G(H)$ est d'indice 5 dans G.

4. Montrer que dans tous les cas G possède un sous-groupe d'indice 5. En déduire que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

Exercice 5 (Représentations)
1. Démontrer qu'un group fini G est abélien ssi toutes ses représentations irréductibles sont de dimension 1.
2. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont une base B est indexée par les éléments du groupe symétrique $G = \mathcal{S}_3$ i.e $B = \{B_\tau \ : \ \tau \in G\}$. On considère l'application $f \ : \ G \to \mathrm{GL}(E)$ définis par $f(g)B_\tau = B_{g\tau g^{-1}}$.
a) Montrer que f est une représentation de G.
b) Soit $F \subset E$, $F = \mathrm{Vect}(B_{(1,2)} + jB_{(1,3)} + j^2 B_{(2,3)}, B_{(1,2)} + j^2 B_{(1,3)} + jB_{(2,3)})$, $j = e^{2\pi i/3}$ un sous-espace vectoriel. Est-ce que F est un sous-représentation irréductible de G ?