ÉNS Lyon — Algèbre 1
L3 — 2016-2017

TD 3 : Représentations linéaires des groupes finis

Les espaces vectoriels sont supposés de dimension finie dans tout ce TD.

Exercice 1.
Avec les définitions naturelles, à quoi correspondrait une représentation linéaire complexe du monoïde $\mathbb{N}$? Quelles seraient ses sous-représentations ?

Exercice 2. [Endomorphismes d'une représentation irréductible]
Soit V une représentation irréductible d'un groupe G sur un corps k. Montrer que $\mathrm{End}_G(V)$ est un corps. Que dire de plus si $k = \mathbb{C}$?
Remarque : ce corps n'est pas nécessairement commutatif.

Exercice 3. [Représentations irréductibles et sous-groupes abéliens]
Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe abélien de G et (ρ, V) une représentation complexe de G. Montrer que V contient une droite L stable par tous les $\rho(h)$ pour $h \in H$. Construire au moyen de L un sous-espace stable par tous les $\rho(g)$. En déduire que les représentations irréductibles de G sont de dimension inférieure ou égale à $[G : H]$.
Rappel : les représentations complexes irréductibles d'un groupe abélien sont de dimension 1.

Exercice 4. [Représentations de $\mathfrak{S}_3$]
Soit (V, ρ) une représentation complexe $\mathfrak{S}_3$. Notons $\tau = (12)$ et $\sigma = (123)$ dans $\mathfrak{S}_3$.

1. Notons respectivement V_0, V_1 et V_2 les espaces propres de $\rho(\sigma) \in GL(V)$ pour les valeurs propres $1, j$ et j^2 (où $j \in \mathbb{C}$ est une racine primitive troisième de l'unité). Montrer que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V est égal à la somme directe $V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$.
2. Montrer que V_0 est stable sous l'action de τ, que $\tau \cdot V_1$ est inclus dans V_2 et que $\tau \cdot V_2$ est inclus dans V_1.
3. Montrer que pour tout $x \in V_1 \backslash \{0\}$, le sous-espace de V engendré par les vecteurs x et $\tau \cdot x$ définit une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$ qui ne dépend pas (à isomorphisme près) du choix de x.
4. En déduire la liste des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 5. [Un contre-exemple au théorème de Maschke si $k \neq \mathbb{C}$]
Notons $\rho : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ le morphisme de groupes défini par

$$\forall x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ \rho(x) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la représentation de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ainsi définie n'est ni irréductible, ni somme directe de sous-représentations irréductibles.

Exercice 6.
Soit V une représentation complexe de G dont la décomposition en représentations irréductibles est

$$V \cong V_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{\oplus n_r}$$

En utilisant le lemme de Schur, montrer que $\mathrm{End}_G(V) \simeq \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$.

Exercice 7. [Représentations fidèles]

Soit G un groupe fini. Une représentation de G est *fidèle* si son noyau est trivial.

1. Si (V, ρ) est une représentation fidèle de G, montrer que pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est G-linéaire si et seulement si $g \in Z(G)$.
2. Montrer que G admet une représentation fidèle.
3. Soit (V, ρ) une représentation complexe de G. Montrer que le noyau de V est constitué des $g \in G$ tels que $\operatorname{Tr} \rho(g) = \dim V$.
4. Montrer que si G admet une représentation irréductible fidèle, son centre est cyclique.
5. Montrer que si H est distingué dans G et $(V, \overline{\rho})$ une représentation fidèle irréductible de G/H, la représentation (V, ρ) de G, définie par $\rho(g) = \overline{\rho}(\overline{g})$, est irréductible de noyau H.

Exercice 8. [Caractères abéliens d'un groupe]

Dans cet exercice, on note G un groupe fini et $\widehat{G} = \operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(b) On admet que tout groupe abélien fini est un produit de groupes cycliques. Montrer que pour tout groupe abélien, $\widehat{G}$ est isomorphe à G. Donner un contre-exemple si G n'est pas abélien.

(c) Si G est abélien, donner un isomorphisme canonique entre G et $\widehat{\widehat{G}}$.