TD n°6 : Représentations et caractères

Exercice 1. [Représentations fidèles]

Soit G un groupe fini. Une représentation de G est *fidèle* si son noyau est trivial.

1. Si (V, ρ) est une représentation fidèle de G, montrer que pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est G-linéaire si et seulement si $g \in Z(G)$.
2. Montrer que G admet une représentation fidèle.
3. Soit (V, ρ) une représentation complexe de G. Montrer que le noyau de V est constitué des $g \in G$ tels que $\operatorname{Tr} \rho(g) = \dim V$.
4. Montrer que si G admet une représentation irréductible fidèle, son centre est cyclique.
5. Montrer que si H est distingué dans G et $(V, \overline{\rho})$ une représentation fidèle irréductible de G/H, la représentation (V, ρ) de G, définie par $\rho(g) = \overline{\rho}(\overline{g})$, est irréductible de noyau H.
6. Montrer que tout sous-groupe distingué de G est une intersection de noyaux de représentations irréductibles.
7. En déduire comment lire rapidement les sous-groupes distingués de G avec sa table de caractères.

Exercice 2. [Groupe diédral]

Pour $n \geq 1$, on note D_{2n} le groupe des isométries du n-gone régulier formé par les racines n-ièmes de l'unité dans le plan complexe. On note r la rotation d'angle $2\pi/n$ de centre 0 et s la symétrie par l'axe des abscisses.

1. Montrer que $D_6 \simeq \mathfrak{S}_3$.
2. Montrer que tout élément de D_{2n} est soit une rotation de la forme $r^k, 0 \leq k \leq n-1$, soit une symétrie orthogonale, et donc de la forme $sr^k, 0 \leq k \leq n-1$. En déduire que le groupe est de cardinal $2n$.
3. Montrer que $sr^k s = r^{-k}$ pour tout $k \in [|1, n|]$. En déduire que si n est impair, toutes les symétries sont conjuguées dans D_{2n}, et si n est pair il y a deux classes de conjugaison de symétries représentées par s et sr.
4. En déduire que D_{2n} a exactement $n/2 + 3$ classes de conjugaison si n est pair, et $(n+3)/2$ classes si n est impair, et les donner.
5. Montrer que pour n impair, les deux seuls caractères linéaires de D_{2n} sont le caractère trivial et le déterminant.
6. Montrer que pour n pair, D_{2n} a exactement quatre caractères linéaires, et les donner.
7. Notons $\zeta_n = e^{2i\pi/n}$. Pour tout entier k entre 1 et $n-1$, on définit la représentation ρ_k sur $\mathbb{C}^2$ par ses valeurs en r et s :
$$\rho_k(r) = \begin{pmatrix} \zeta_n^k & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-k} \end{pmatrix} \quad \rho_k(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Montrer que c'est bien une représentation et calculer le caractère correspondant.
8. Montrer que ρ_k et ρ_{n-k} sont isomorphes.
9. Lorsque n est pair, que dire de $\rho_{n/2}$? Montrer que ρ_k est irréductible dans tous les autres cas.
10. Montrer qu'on a ainsi obtenu toutes les représentations irréductibles de D_{2n}.

Exercice 3. [Groupes non abéliens d'ordre 8]

1. Donner les classes de conjugaison du groupe dihédral D_8 et ses caractères linéaires. En déduire sa table de caractères.
2. Notons $H_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions, où $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $k = ij = -ji$. Calculer ses classes de conjugaison.
3. Montrer que H_8 possède quatre caractères linéaires distincts. En déduire sa table de caractères. La comparer avec celle de D_8.
4. Montrer que les deux groupes D_8 et H_8 ne sont pas isomorphes.

Exercice 4. Calculer la table de caractères de $\mathfrak{A}_4$.