TD n°7 : Représentations et dualité

Exercice 1. [Table de caractères de $\mathfrak{S}_5$] On cherche ici à dresser la table de caractères de $\mathfrak{S}_5$. On notera ε la signature, et on rappelle qu'on connaît une représentation de dimension 4 qui est la représentation standard de $\mathfrak{S}_5$.

1. Donner des représentants des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_5$ et le cardinal de chacune de ces classes.
2. Calculer le caractère de la représentation standard (on notera par la suite H pour la représentation standard).
3. Montrer que la représentation $H(\varepsilon)$ est irréductible non isomorphe à H, et donner son caractère.
4. En faisant agir $\mathfrak{S}_5$ sur les paires d'éléments distincts de $\{1, \dots, 5\}$, construire une représentation de dimension 10 de $\mathfrak{S}_5$.
5. Montrer que cette représentation se décompose comme somme de trois représentations irréductibles, dont la standard et la triviale.
6. En déduire que $\mathfrak{S}_5$ possède une représentation irréductible, qu'on notera W, de dimension 5, et calculer son caractère.
7. En utilisant l'orthogonalité des caractères, montrer que $W' = W(\varepsilon)$ n'est pas isomorphe à W.
8. Dresser la table de caractères de $\mathfrak{S}_5$.

Exercice 2. [Calcul de bases duales]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner la base duale de la base $(1, X, \cdots, X^n)$ de $K_n[X]$.
2. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de E et $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ une famille de E^* telles que pour tous $i, j \in \{1, \cdots, n\}$,
$$\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}.$$
En déduire que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ est une base de E^* et que ces bases sont duales.
3. Pour $(e_1, \cdots, e_n)$ une K-base de E, exprimer la base duale de $(e_1, e_1 + e_2, \cdots, e_1 + \cdots + e_n)$ en fonction de celle de $(e_1, \cdots, e_n)$.
4. Soient $(a_1, \cdots, a_n)$ des éléments tous distincts de K. On note, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\varphi_i \in K_{n-1}[X]^*$ définie par
$$\varphi_i(P) = P(a_i).$$
Montrer que les φ_i forment une base de $K_{n-1}[X]^*$, et calculer sa base antéduale dans $K_{n-1}[X]$.
5. Pour $a, b \in K$ distincts, montrer que les formes linéaires $P \mapsto P(a)$, $P \mapsto P'(a)$, $P \mapsto P(b)$, $P \mapsto P'(b)$ forment une base de $K_3[X]^*$, et calculer la base antéduale.

Exercice 3. [Formes linéaires sur $M_n(K)$]
Soit φ une forme linéaire sur $M_n(K)$.

1. Pour tous $i, j \in \{1, \cdots, n\}^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $M_n(K)$ dont le seul coefficient non nul est en (i, j) et vaut 1. On pose $A = (\varphi(E_{j,i}))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$, montrer que pour toute matrice M de $M_n(K)$,

$$\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM).$$

   En déduire que les formes linéaires de $M_n(K)$ sont exactement les formes linéaires de la forme $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$, où A parcourt $M_n(K)$.
2. En déduire que tout hyperplan de $M_n(K)$ contient une matrice inversible.

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel (pouvant être de dimension infinie) et $\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E.

1. Montrer que si $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$, alors

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, \varphi_i \subset \mathrm{Ker}\, \varphi.$$

2. Réciproquement, supposons que $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, \varphi_i \subset \mathrm{Ker}\, \varphi$. On pose $F = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, \varphi_i$. Montrer que E/F est de dimension finie.
3. Montrer que les formes linéaires φ_i et φ se factorisent sur E/F (on les notera $\overline{\varphi_i}$ et $\overline{\varphi}$ sur E/F).
4. Montrer que les $\overline{\varphi_i}$ engendrent $(E/F)^*$, et en déduire que $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$.
5. Avec le même type d'argument, montrer que $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ sont linéairement indépendantes si et seulement si l'application $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) : E \to K^n$ est surjective.