TD №8 : Formes linéaires et dualité

Exercice 1. 1. Soit (f_1, f_2, f_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose :

$$e_1 = (1, -1, 1), e_2 = (1, 0, 1), e_3 = (0, 2, -1).$$

Détérminer la base duale de (e_1, e_2, e_3).

2. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps K de bases $(f_1, \dots, f_n)$ et $(e_1, \dots, e_n)$. Soit P - une matrice de passage entre (f_j) et (e_j) et Q - une matrice de passage entre $(f_j)^*$ et $(e_j)^*$. Exprimer Q en termes de P.

Exercice 2. Soin $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}, K$ un corps commutatif.

1. Est-ce que K^{n-1} est un hypreplan de K^n ? Donner la forme générale des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ est en déduire une caractérisation de ses hyperplans.
2. Est-ce que $K_{n-1}[x]$ est un hyperplan de $K_n[x]$? Si oui, décrire tous ses supplémentaires.
3. Dans $E = \mathbb{K}_2[x]$ considèrons $F = \{P \in E | P(1)+P'(0) = 0\}$. Prouver que F est un hyperplan de E.
4. Trouver son équation dans la base standard $(1, x, x^2)$ et donner une base de F.

Exercice 3. [Équations explicites d'un sous-espace vectoriel]

1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension d. Montrer qu'on peut écrire F comme l'intersection de $n - d$ hyperplans, mais pas moins.

   On travaille maintenant dans K^n. Rappelons que toute matrice $M \in M_{n,m}(K)$ s'écrit sous la forme
$$M = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$
   avec $P \in \mathrm{GL}_n(K), Q \in \mathrm{GL}_m(K)$ et r le rang de M.
2. Déterminer des générateurs du noyau et de l'image de M en fonction de P et Q.
3. En considérant ${}^tM$, déterminer des équations du noyau et de l'image de M en fonction de P et Q.

Exercice 4. [Réduction d'endomorphismes]

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{End}(E)$ dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de ${}^tu \in \mathrm{End}(E^*)$ est égal à χ_u, en déduire qu'il est également scindé.
2. En déduire que ${}^tu$ admet un vecteur propre dans E^*, puis que u admet un hyperplan stable dans E.
3. Prouver par récurrence que u est trigonalisable.
4. Supposons que pour un certain $r \in \{1, \cdots, \dim(E)-1\}$, u laisse stable tous les sous-espaces vectoriels de dimension r de E. Montrer que u est une homothétie.