TD n°9 : Formes bilinéaires, produit tensoriel

Comme dans le cours, tout corps est supposé commutatif.

Exercice 1. Soient K un corps et E, F, G trois K-espaces vectoriels. Montrer que si $\phi : E \times F \to G$ est à la fois linéaire et bilinéaire, alors c'est l'application nulle.

Exercice 2. Soit K un corps. Montrer que l'application

$$\begin{aligned}\phi : M_2(K) \times M_2(K) &\to K \\ (A, B) &\mapsto \det(A + B) - \det(A - B)\end{aligned}$$

est bilinéaire et calculer sa matrice dans la base canonique.

Exercice 3. Soient K un corps, $E = K^2$ et ϕ la forme bilinéaire sur E définie par $\phi(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$.

1. Trouver la matrice A de ϕ dans la base $B = ((1, 0), (1, 1))$.
2. Trouver la matrice A' de ϕ dans la base $B' = ((2, 1), (1, -1))$.
3. Trouver la matrice de passage P de B à B', et vérifier que $A' = {}^tPAP$.

Exercice 4. Soient K un corps, E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie et $\phi \in \mathrm{Bil}(E \times F, K)$. Notons $E_0 = F^\perp$ et $F_0 = E^\perp$. Montrer que ϕ induit une forme bilinéaire non dégénérée $\phi_0 : E/E_0 \times F/F_0 \to K$, et en déduire que $\dim(E/E_0) = \dim(F/F_0)$.

Exercice 5. Soient E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$ et ϕ l'application

$$\begin{aligned}\phi : E \times E &\to \mathbb{C} \\ (A, B) &\mapsto n\,\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B).\end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire sur E.
2. Soit $U \subset E$ le sous-espace des matrice de trace nulle. Montrer que ϕ est dégénérée, mais $\phi_{|U}$ est non-dégénérée.
3. Soit $V \subset E$ le sous-espace des matrices A telles que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et ${}^t\bar{A} = -A$. Montrer que $\phi_{|V}$ est définie négative, i.e. pour tout $A \in V \setminus \{0\}$, $\phi(A, A) < 0$.
4. Calculer $E^\perp$ et déterminer sa dimension.

Exercice 6. Soient K un corps et E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Construire un isomorphisme naturel entre $E^* \otimes F$ et $\mathrm{Hom}(E, F)$.

Exercice 7. Soient G un groupe fini, K un corps et (ρ, V), (ρ', V') deux représentations de G dimension finie sur K. Construire une représentation $\rho \otimes \rho'$ de G sur $V \otimes V'$, et exprimer son caractère en fonction de ceux de ρ et de ρ'.