DM N°1

Exercice 1. On s'intéresse dans cet exercice à un anneau A (unitaire) intègre, commutatif, noethérien, dont tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux, et tel que si $x \in K = \mathrm{Frac}(A)$ est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans A, alors $x \in A$.

1. Montrer qu'un corps (commutatif) vérifie ces propriétés. Donner également un exemple d'un anneau A qui n'est pas un corps et qui vérifie ces propriétés.
2. On va ici montrer que pour tout idéal $\mathfrak{a} \neq (0)$ de A, $\mathfrak{a}$ contient un produit d'idéaux premiers.
   (a) Si l'ensemble I des idéaux non nuls de A qui ne vérifient pas cette propriété est non vide, montrer qu'il admet un élément maximal (pour l'inclusion) $\mathfrak{m}$, et que cet idéal n'est pas premier.
   (b) En utilisant deux éléments $a, b \in A \setminus \mathfrak{m}$ tels que $ab \in \mathfrak{m}$, montrer que $\mathfrak{m}$ vérifie quand même la propriété. Conclure.
3. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, on note $\mathfrak{p}^{-1} = \{x \in K : x\mathfrak{p} \subset A\}$. Montrer que $\mathfrak{p}^{-1}$ est un sous-groupe de K qui est stable par multiplication par des éléments de A.
4. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et soit $a \in \mathfrak{p}$. Soient $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ des idéaux premiers non nuls de A tels que $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r \subset (a) \subset \mathfrak{p}$, avec r minimal.
   (a) Montrer qu'il existe un entier $i \in \{1, \cdots, r\}$ tel que $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$ et même $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$. Quitte à renuméroter, on supposera par la suite que $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$.
   (b) Montrer qu'il existe $b \in \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_r$ tel que $b \notin (a)$ et $a^{-1}b \in \mathfrak{p}^{-1}$. En déduire que $\mathfrak{p}^{-1} \neq A$.
5. Soit $\mathfrak{a} \neq (0)$ un idéal de A.
   (a) Montrer qu'il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathfrak{a}$ tels que $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.
   (b) On suppose jusqu'à la fin de la question 5. qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{a}$. Soit alors $x \in \mathfrak{p}^{-1}$. Montrer qu'il existe des $a_{i,j} \in A$ tels que $x\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\alpha_j$.
   (c) Soit $M = (x\delta_{ij} - a_{ij}) \in M_n(K)$, et soit $d = \det(M)$. Montrer que $d = 0$.
   (d) Montrer que $x \in A$.
   (e) En déduire une contradiction.
6. On va maintenant montrer que tout idéal $\mathfrak{a} \notin \{(0), A\}$ se décompose de façon unique comme produit d'idéaux premiers. On va donc noter $\mathcal{N}$ l'ensemble des idéaux différents de (0) et de A qui ne sont pas produits d'idéaux premiers de A.
   (a) On suppose que $\mathcal{N}$ est non vide. Montrer qu'alors $\mathcal{N}$ admet un élément maximal (pour l'inclusion) $\mathfrak{a}$ et qu'il existe un idéal maximal $\mathfrak{p}$ contenant strictement $\mathfrak{a}$.
   (b) Montrer que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} \subset A$ et en déduire que $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = A$.
   (c) Montrer que $\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}$ est propre, et en déduire qu'il n'est pas dans $\mathcal{N}$.
   (d) Montrer que tout idéal propre et non nul de A s'écrit comme produit d'idéaux premiers.
   (e) Soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{p}$ trois idéaux de A avec $\mathfrak{p}$ premier. Montrer que si $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$, alors $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$.
   (f) Montrer que si $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_s$ avec les $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_j$ des idéaux premiers non nuls, alors $r = s$ et quitte à renuméroter, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_j$.
7. (a) Montrer que si tous les idéaux maximaux de A sont principaux, alors A est principal.
   (b) Montrer que A est principal si et seulement si il est factoriel.