ENS Lyon
L3

Algèbre 2
2016-2017

EXAMEN FINAL : Durée 3 heures.
Notes de cours autorisées. Sujet de 2 pages.

Exercice 1 Norme et trace

Soit $E\backslash K$ une extension de corps. Pour chaque $\alpha \in E^*$ on définit

$$\varphi_\alpha : E \to E,\ x \mapsto \alpha x$$

Montrer que φ_α est un automorphisme de le K-espace vectoriel E.
On définit
– *la norme de* α dans l'extension $E\backslash K$ par $N_{E\backslash K}(\alpha) := \det \varphi_\alpha$
– *la trace de* α dans l'extension $E\backslash K$ par $Tr_{E\backslash K}(\alpha) := \operatorname{tr} \varphi_\alpha$

1. Montrer que $\mathbb{C}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{R}$ et détérminer le groupe de Galois de l'extension $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.
2. Calculer la norme et la trace de $x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Montrer que
   – si la norme de $x + iy$ vaut 1 alors il existe z tel que
   $$x + iy = z/\sigma(z) \tag{1}$$
   pour un générateur σ du groupe du Galois.
   – si la trace de $x + iy$ vaut 0 alors il existe z tel que
   $$x + iy = \sigma(z) - z \tag{2}$$
   pour un générateur σ du groupe du Galois.

   Soient $E\backslash K$ une extension galoisienne du corps K de degré $d = r \times n$ et $\alpha \in E$ un élément tel que $K(\alpha)$ est un corps intermédiaire de degré n sur K.

   Supposons qu'il existe α un élément tel que $E = K(\alpha)$ et de polynôme minimal $Q(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_0$.
4. (a) Détérminer les coefficients de $A_{K(\alpha)}$ la matrice de φ_α dans la base $1, \alpha, \alpha^2 \ldots \alpha^{n-1}$.
   (b) Montrer que $\chi_{\varphi_\alpha}(T)$ le polynôme caractéristique de $A_{K(\alpha)}$ s'annule en α.
   (c) En déduire que $Q(T) = \chi_{\varphi_\alpha}(T)$.
5. (a) Montrer que φ_α est diagonalisable.
   (b) Si le groupe de Galois de $E\backslash K$ est $\{\sigma_i,\ i = 1 \ldots n\}$ quelles sont les valeurs propres de φ_α ?
   (c) En déduire que
   $$N_{E\backslash K}(\alpha) = \sigma_1(\alpha)\sigma_2(\alpha)\ldots\sigma_n(\alpha),\ Tr_{E\backslash K}(\alpha) = \sigma_1(\alpha) + \sigma_2(\alpha) \ldots + \sigma_n(\alpha).$$

   On considère $E\backslash K(\alpha)$ et on choisit $\{e_i\}_{i=1\ldots r}$ une base de E comme $K(\alpha)$-espace vectoriel.
6. Montrer que $\{\alpha^j e_i\}_{i=1\ldots r,\, j=1\ldots n}$ est une base de E comme K-espace vectoriel.
7. Montrer que $K(\alpha)e_i$ est un sous K- espace vectoriel stable pour φ_α
   (c-à-d $x \in K(\alpha)e_i \Rightarrow \varphi_\alpha(x) \in K(\alpha)e_i$).
8. (a) En déduire que A_K la matrice de φ_α dans la base $\{\alpha^j e_i\}_{i=1\ldots r,\, j=1\ldots n}$ est une matrice diagonale par blocs avec r blocs diagonaux de taille $n \times n$.
   (b) Montrer que $\chi_{\varphi_\alpha}(T)^r$ est le polynôme caractéristique de A_K.

(c) En déduire que

$$N_{E\backslash K}(\alpha) = \Pi_{\sigma\in G}\sigma(\alpha),\ Tr_{E\backslash K}(\alpha) = \Sigma_{\sigma\in G}\sigma(\alpha),$$

où G est le groupe de Galois de $E\backslash K$.

Exercice 2

Le but de cet exercice est une démonstration du théorème de Hilbert 90.

1. Soit $L\backslash K$ une extension finie et $\sigma_1, \ldots, \sigma_N : L \to \overline{K}$ des morphismes K-linéaire distincts. On suppose qu'il existe $a_i \in \overline{K}$ tels que l'application $e : L \to \overline{K}$ soit trivial :

$$e(x) := a_1\sigma_1(x) + a_2\sigma_2(x) + \ldots + a_N\sigma_N(x) = 0,\ \forall x \in L$$

   (a) Montrer que $\forall a \in L$, $e(ax) - \sigma_N(a)e(x)$ admet une expression qui fait intervenir :
   – les éléments $a, x, \sigma_N(a)$ et les $a_i, i = 1 \ldots N$ de $\overline{K}$
   – les morphismes $\sigma_1, \ldots \sigma_{N-1}$.

   (b) Montrer par récurrence sur N que $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ sont $\overline{K}$-linéairement indépendantes (pour la structure évidente de $\overline{K}$-espace vectoriel des applications $L \to \overline{K}$).

2. (Version multiplicative) Soit $L\backslash K$ une extension cyclique de degré d et σ un générateur du groupe de Galois. Pour rendre les notations plus lisibles, on pose $\tau(x) = x^\tau$ pour tout élément τ du groupe de Galois et tout $x \in L$.

   (a) Si $\alpha \in L^*$, montrer que l'on a $N_{L/K}(\alpha) = N_{L/K}(\sigma(\alpha))$.

   (b) En déduire que si $\beta = \sigma(\alpha)/\alpha$ pour $\alpha \in L^*$ alors on a $N_{L/K}(\beta) = 1$.

   (c) Réciproquement, si l'on suppose $N_{L/K}(\beta) = 1$, montrer qu'il existe un élément $\theta \in L$ tel que

$$\gamma := \theta + \sum_{j=1}^{d-1} \beta\, \beta^\sigma \ldots \beta^{\sigma^{j-1}} \sigma^j(\theta) \neq 0.$$

   (d) Comparer $\beta\sigma(\gamma)$ et γ, et en déduire qu'il existe $\alpha \in L^*$ tel que

$$\beta = \sigma(\alpha)/\alpha.$$

3. (Version additive) On utilise les mêmes notations que dans question (2).

   (a) Si $\beta = \sigma(\alpha) - \alpha$ pour $\alpha \in L$, montrer que l'on a $\mathrm{Tr}_{L/K}(\beta) = 0$.

   (b) Réciproquement, si l'on suppose $\mathrm{Tr}_{L/K}(\beta) = 0$, calculer $\sigma(\gamma) - \gamma$ pour

$$\gamma := \sum_{j=1}^{d-1}(\beta + \beta^\sigma + \ldots + \beta^{\sigma^{j-1}})\sigma^j(\theta), \quad \theta \in L$$

   en faisant intervenir $\mathrm{Tr}_{L/K}(\theta)$, et en déduire qu'il existe $\alpha \in L$ tel que $\beta = \sigma(\alpha) - \alpha$.

4. (Artin-Schreier) Soit $L\backslash K$ une extension cyclique de degré $d = p > 0$ où p est la caractéristique, et σ un générateur du groupe de Galois.

   (a) Montrer qu'il existe un élément $\alpha \in L$ tel que $\sigma(\alpha) - \alpha = 1$.

   (b) En déduire que $L = K[\alpha]$ et que le polynôme irréductible de α sur K est de la forme $X^p - X - a = 0$ avec $a = \alpha^p - \alpha \in K^*$.

5. On considère le corps cyclotomique $K = \mathbb{Q}[\zeta_{17}]$. Expliciter un générateur σ du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Déterminer une tour de corps intermédiaires $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_3 \subset K_4 = K$ avec $\deg_{\mathbb{Q}} K_j = 2^j$ en précisant en fonction de ζ_{17} des éléments α_j tels que $K_j = \mathbb{Q}[\alpha_j]$.
   Indication. Pour déterminer σ, on cherchera un générateur (le plus simple possible) σ du groupe multiplicatif $G = (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}^\times, \times)$ (ce n'est pas la classe de 2), ainsi que tous les sous-groupes de G exprimés à l'aide de σ. Certaines sommes adéquates des conjugués $\sigma^\ell(\zeta_{17})$ sont fixées par ces sous-groupes, et cela permet de déterminer K_j. On n'est plus très loin d'une construction explicite du polygone à 17 côtés !