ENS Lyon — Algèbre 2
L3 — 2015-2016

TD n°1 : Anneaux, divisibilité et irréductibilité

Exercice 1. [Questions diverses]

1. Montrer que dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, l'élément 2 est irréductible mais n'est pas premier.
2. Soient A un anneau et $a \in A$ un élément nilpotent. Montrer que $1+a$ est inversible dans A.
3. Soit A un anneau intègre. Montrer que les éléments inversibles de $A[X]$ sont exactement les constantes inversibles dans A.
4. Exhiber un élément inversible de degré non nul dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 2.

1. Montrer que, quelque soit le corps K, l'ensemble E des polynômes irréductibles unitaires de $K[X]$ est infini.
2. Montrer que si K est fini ou dénombrable alors E est dénombrable.
3. Montrer que si K n'est pas dénombrable alors E ne l'est pas non plus.

Exercice 3. Montrer que dans $\mathbb{Z}$, un élément est premier si et seulement si il est irréductible.

Exercice 4. [Anneaux de valuation discrète]

Soit K un corps. Une *valuation discrète* sur K est une fonction surjective $v : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ telle que pour tous $x, y \in K^*$:

$$v(xy) = v(x) + v(y) \quad \text{et} \quad v(x+y) \geq \min(v(x), v(y)).$$

1. Donner pour $K = \mathbb{Q}$ et tout premier p, une valuation discrète v_p sur $\mathbb{Q}$ telle que $v_p(p) = 1$.
2. Montrer qu'à toute valuation discrète sur K, on peut associer une distance d *ultramétrique* sur K, c'est-à-dire telle que pour tous $x, y, z \in K$:

$$d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z)).$$

   Comment s'intersectent les boules pour cette distance ? Calculer, pour la valuation v_2 du (a) et la distance correspondante, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n$.
3. Montrer que pour un corps K muni d'une valuation discrète v, $A := \{x \in K | v(x) \geq 0\}$ est un anneau tel que $A^* = v^{-1}(0)$. Un anneau ainsi obtenu est appelé *anneau de valuation discrète*. Dire quels sont les anneaux ainsi obtenus pour les exemples du 1..
4. Pour un anneau de valuation discrète A, une *uniformisante de* A est un élément π de A de valuation 1. Montrer que tout élément non-nul de A s'écrit de manière unique $a = \pi^n u$ avec $u \in A^*$.
5. En déduire que les idéaux de A sont exactement les idéaux de la forme $(\pi^n), n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme primitif à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (i.e. les coefficients sont premiers entre eux dans l'ensemble) et soit p un entier premier ne divisant pas a_n.

1. Montrer que si la réduction modulo p du polynôme $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, alors $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Supposons que pour tout p ne divisant pas a_n, la réduction modulo p n'est pas irréductible. Peut-on en déduire que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 6. [L'anneau des fonctions holomorphes]

Soit $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ l'anneau des fonctions holomorphes dans tout le plan complexe.

1. Montrer que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est un anneau intègre et déterminer son corps des fractions, et identifier les éléments inversibles.
2. Montrer qu'un élément $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ est irréductible si et seulement s'il admet un seul zéro et que celui-ci est de plus un zéro simple.

Exercice 7. [Mise en jambes sur les morphismes d'anneaux...]

1. Soit A un anneau. Déterminer tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{Z} \to A$, $\mathbb{Z}[X] \to A$, $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ puis $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$.
3. Soit G un groupe abélien noté additivement. Montrer que l'ensemble A des morphismes de groupes $G \to G$ est naturellement muni d'une structure d'anneau. A quel anneau classique est-il isomorphe lorsque $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \geq 1$ entier ?