ENS Lyon Algèbre 2
L3 2016-2017

TD n°12 : Théorie de Galois

Exercice 1. Soient $x = \sqrt[3]{2}, j = e^{2i\pi/3}$ et $K = \mathbf{Q}[x, j]$.

1. Montrer que $K/\mathbf{Q}$ est galoisienne, de dimension 6, et que $Gal(K/\mathbf{Q})$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.
2. Expliciter la correspondance de Galois pour l'extension $K/\mathbf{Q}$.

Exercice 2. Soit $x = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que $[\mathbf{Q}[x] : \mathbf{Q}] = 4$.
2. Montrer que $\mathbf{Q}[x]/\mathbf{Q}$ n'est pas galoisienne, mais que $\mathbf{Q}[x]/\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]/\mathbf{Q}$ le sont.
3. Montrer qu'en revanche $\mathbf{Q}[\sqrt{2 + \sqrt{2}}]$ est galoisienne de degré 4 sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 3. Soit $P(X) = X^5 - 6X + 3 \in \mathbf{Q}[X]$.

1. Montrer que P est irréductible.
2. Montrer que P possède trois racines réelles et deux racines complexes conjuguées.
3. On fixe désormais L un corps de décomposition de P, et on note $G = Gal(L/\mathbf{Q})$. Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$.
4. En déduire la forme des sous-extensions galoisiennes de $L/\mathbf{Q}$.

Exercice 4. Soit $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, on considère $f = X^3 - (1 + \sqrt{2})$ et $g = X^3 - (1 - \sqrt{2})$. On désigne par α (resp. β) la racine réelle de f (resp. g) dans $\overline{\mathbb{Q}}$. On pose $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \alpha, j)$.

1. (a) Trouver un polynôme P de degré 6 de $\mathbb{Q}[X]$ dont α soit racine.
   (b) Montrer que $k \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ et que $\mathbb{Q}(\alpha) = k(\alpha)$.
   (c) Exprimer β en fonction de α.
   (d) Soit $\omega = \alpha - \frac{1}{\alpha}$. Trouver un polynôme Q de degré 3 de $\mathbb{Q}[X]$ tel que $Q(\omega) = 0$ et montrer que Q est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Vérifier que les autres racines de Q dans $\overline{\mathbb{Q}}$ sont $\omega' = j\alpha - \frac{1}{j\alpha}$ et $\omega'' = j^2\alpha - \frac{1}{j^2\alpha}$.
   (e) En considérant $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \omega)$, déterminer $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ et en déduire que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. (a) Montrer que $[L : \mathbb{Q}] = 12$.
   (b) Préciser les deux $\mathbb{Q}-$automorphismes ϕ_1 et ϕ_2 de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Déterminer les isomorphismes τ_1, τ_2, τ_3 de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \alpha)$ sur un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ qui prolongent ϕ_1. De même, déterminer les isomorphismes τ_4, τ_5, τ_6 de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \alpha)$ sur un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ qui prolongent ϕ_2.
   (c) Déterminer les douze $\mathbb{Q}-$isomorphismes $\sigma_1, ..., \sigma_{12}$ de L sur un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$.
   (d) Montrer que l'extension $L/\mathbb{Q}$ est galoisienne.

Exercice 5. Soit L/K une extension finie de corps.

1. Montrer que si tout élément de $L \setminus K$ est inséparable sur K (on dit que l'extension est *purement inséparable* ou *radicielle*), alors la caractéristique de K est un nombre premier p, que $[L : K]_s = 1$ et que $[L : K]$ est une puissance de p.
2. Montrer que dans le cas général, $[L : K]_s$ divise $[L : K]$ et que soit le quotient est 1, soit K est de caractéristique p et le quotient est une puissance de p.

3. Montrer que le groupe $Aut(L/K)$ est fini et que son cardinal divise $[L:K]_s$, et les deux coïncident si et seulement si l'extension est normale.

Exercice 6. Soient $p_1, \ldots, p_r$ des éléments de $\mathbf{Q}^*$, et $K = \mathbf{Q}[\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_r}]$.

1. Montrer qu'on peut munir le groupe $\mathbf{Q}^*/(\mathbf{Q}^*)^2$ d'une structure de $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel, et que la famille $\overline{-1}, \overline{p}$, où p parcourt les nombres premiers, en est une base.
2. On suppose que les images de $p_1, \ldots, p_r$ dans $\mathbf{Q}^*/(\mathbf{Q}^*)^2$ vu comme $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel sont indépendantes. Montrer que $[K:\mathbf{Q}] = 2^r$.
3. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}$ n'est pas entier pour $n \geq 2$.