ENS Lyon
L3

Algèbre 2
2016-2017

TD n°3 : Anneaux noethériens

Dans ce TD, sauf mentionné, tous les anneaux et corps sont supposés unitaires commutatifs.

Exercice 1. Parmi les anneaux suivants, lesquels sont noethériens ?

1. Le sous anneau $A \subset \mathbb{C}(X)$ constitué des fractions rationnelles sans pôles sur le cercle $|z| = 1$.
2. L'anneau des séries entières ayant un rayon de convergence strictement positif.
3. L'anneau des séries entières ayant un rayon de convergence infini.
4. L'anneau des polynômes à coefficients rationnels tels que $P(0) \in \mathbb{Z}$.
5. L'anneau des suites à termes dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 2. [Généralités sur les anneaux noethériens]

1. Un sous-anneau (respectivement quotient par un idéal premier) d'un anneau noethérien (respectivement principal, euclidien) vérifie-t-il la même propriété ?
2. Supposons $A[X]$ noethérien. A est-il noethérien ?
3. Soit A un anneau noethérien. Montrer que tout élément s'écrit comme produit d'irréductibles.

Exercice 3. [Radical]

Soit A un anneau. Pour tout idéal I de A, on appelle radical de I, noté $\sqrt{I}$ l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{a \in A | \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}$$

En particulier, le nilradical de A est le radical de (0).

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A et que $\sqrt{(\sqrt{I})} = \sqrt{I}$.
2. Donner les radicaux des idéaux de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que le nilradical de A est inclus dans l'intersection de ses idéaux premiers, puis que pour tout I, le radical de I est inclus dans l'intersection des idéaux premiers contenant I.

Exercice 4.

1. Soit A un anneau noethérien. Montrer que tout idéal s'écrit comme intersection finie d'idéaux irréductibles, où un idéal I est dit irréductible si $I = I_1 \cap I_2 \Rightarrow I = I_1$ ou $I = I_2$.
2. Soient A un anneau noethérien et I un idéal. On rappelle que $\sqrt{I}$ est l'idéal défini par $\sqrt{I} = \{x \in A, \exists n > 0, x^n \in I\}$. Montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $(\sqrt{I})^n \subset I$.

Exercice 5. Soit A un anneau noethérien.

1. Soit I un idéal de A. Montrer qu'il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{n}_n$ contenant I tels que $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n \subset I$.
2. En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premier minimaux pour l'inclusion.

Exercice 6. Le but de cet exercice est de déterminer la forme des idéaux premiers et maximaux de $\mathbb{Z}[X]$. Soit I un idéal premier.

1. Montrer que $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$.
2. On suppose que $I \cap \mathbb{Z} = 0$ et on note $\tilde{I} = I\mathbb{Q}[X]$ l'idéal engendré par I dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que $\tilde{I} \cap \mathbb{Z}[X] = I$. En déduire que I est principal engendré par un polynôme non constant irréductible et primitif.

3. On suppose que $I \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Montrer que I/pI est un idéal premier de $\mathbb{F}_p[X]$. En déduire que I est engendré soit par p, soit par p et un polynôme unitaire dont la réduction modulo p est irréductible.
4. Parmi les idéaux trouvés, lesquels sont maximaux ?
5. En s'inspirant de cette méthode, montrer que les idéaux premiers de $\mathbb{C}[X, Y]$ sont soit principaux, soit de la forme $(X - a, Y - b)$. Quels sont les idéaux maximaux ?