ENS Lyon — Algèbre 2
L3 — 2016-2017

TD n°6 : Généralités sur les anneaux

Exercice 1.
1. Soit A un anneau factoriel et K son corps des fractions, p un élément irréductible de A et κ le corps des fractions de $A/(p)$. Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$ tel que $p \nmid a_n$ et tel que la réduction modulo p de P est un polynôme irréductible de $\kappa[X]$. Montrer qu'alors P est irréductible dans $K[X]$.
2. Montrer que le polynôme $X^3 - X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 2. Montrer que l'anneau $\mathbf{C}[X,Y]/(Y - X^2)$ est principal.

Exercice 3.
1. Soient A un anneau et $S \subset A$ est une partie de A stable par multiplication qui contient 1 mais ne contient pas 0. Notons E_S l'ensemble des idéaux disjoints avec S. Montrer que E_S est non-vide, et que tout élément maximal de E_S est un idéal premier.
2. Montrer qu'un anneau intègre est factoriel si et seulement si tout idéal premier non-nul contient un élément premier.
3. Soit A un anneau factoriel. Montrer que A est principal si et seulement si tout idéal premier non-nul est maximal.

Exercice 4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $U_n = \{e^{2ik\pi/n} \mid k \wedge n = 1\}$ l'ensemble des racines de l'unité n-ièmes primitives, et on définit le n-ième polynôme cyclotomique

$$\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in U_n} (X - \zeta) \in \mathbb{C}[X].$$

1. Montrer que le degré de $\Phi_n(X)$ est $\phi(n)$, l'indicatrice d'Euler de n.
2. Montrer que pour tout n on a
$$X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(X),$$
et en déduire la formule $n = \sum_{d \mid n} \phi(d)$.
3. En déduire que $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$.
4. Pour $n = p$ un nombre premier, calculer explicitement $\Phi_p(X)$ et montrer que celui-ci est irréductible.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation de Mordell : $y^2 = x^3 - 2$.
1. Si A est un anneau factoriel et a, b deux éléments de A premiers entre eux tels que $ab = c^n$ pour un certain $c \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'alors il existe $u, v \in A^\times$ et $\alpha, \beta \in A$ tels que $a = u\alpha^n$ et $b = v\beta^n$.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation de Mordell. Montrer que $y + i\sqrt{2}$ et $y - i\sqrt{2}$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ (qui est un anneau factoriel).
3. En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation de Mordell.

Exercice 6. Soient A un anneau noethérien et $n \in \mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers P de A tels que le cardinal A/P est inférieur ou égal à n.

1. Supposons par l'absurde qu'il y a une infinité de tels idéaux premiers. Montrer que A est infini.
2. Soit I un idéal maximal parmi ceux tels que l'anneau A/I possède une infinité de tels idéaux premiers. Montrer que I est premier.
3. En déduire que l'on peut supposer que A est intègre, et que tout quotient non trivial de A ne possède qu'un nombre fini de tels idéaux premiers.
4. Soient $a_1, \cdots, a_{n+1}$ des éléments distincts de A et $p = \prod_{i<j}(a_i - a_j)$. Montrer que si P est un idéal premier qui ne contient pas p, alors $\#(A/P) > n$.
5. Conclure.

Exercice 7. [Localisation d'un anneau intègre]

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K. Si S est une partie de A stable par multiplication qui contient 1 mais ne contient pas 0, on pose

$$S^{-1}A := \left\{ \frac{a}{s},\ a \in A,\ s \in S \right\} .$$

1. Montrer que $S^{-1}A$ est un sous-anneau intègre de K.
2. Soit $\phi : A \to S^{-1}A$ l'inclusion canonique. Montrer qu'elle vérifie la propriété universelle suivante : pour tout morphisme d'anneaux $f : A \to R$ qui envoie les éléments de S sur des éléments inversibles, il existe un unique morphisme d'anneaux $f' : S^{-1}A \to R$ tel que $f = f' \circ \phi$.
3. Montrer que l'application $I \mapsto \phi^{-1}(I)$ définit une injection des idéaux de $S^{-1}A$ vers ceux de A, qui envoie les idéaux premiers sur des idéaux premiers.
4. Soit $\mathcal{I}(A, S)$ l'ensemble des idéaux de A disjoints avec S. Montrer que si I est un élément maximal de $\mathcal{I}(A, S)$, alors I est un idéal premier.
5. Montrer que si A est principal (respectivement factoriel), alors $S^{-1}A$ est principal (respectivement factoriel).
6. En déduire que $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ est un anneau principal.
7. Montrer que si A est euclidien de stathme ν, alors $S^{-1}A$ est euclidien de stathme μ défini par

$$\mu(x) := \inf_{\substack{s \in S \\ sx \in A}} \nu(sx) .$$