ENS Lyon | Algèbre 2
L3 | 2016-2017

TD n°8 : Extensions de corps (suite)

Exercice 1. [Extensions biquadratiques]

1. Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Soit L/K une extension de degré 2 (*extension quadratique*).
   (a) Soit $P \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré 2. Montrer qu'il existe $a, b \in K$ tels que $P = (X-a)^2 - b$.
   (b) Démontrer qu'il existe un élément non nul α de L tel que $\alpha^2 \in K$ et $L = K(\alpha)$.
   (c) On conserve les notations de la question (b). Soit $\beta \in L$ tel que $L = K(\beta)$ et $\beta^2 \in K$.
2. Soient p et q deux nombres premiers distincts.
   (a) Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})/\mathbb{Q}$.
   (b) Soit $\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ tel que $\beta^2 \in \mathbb{Q}$. Démontrer qu'un des éléments β, $\beta/\sqrt{p}$, $\beta/\sqrt{q}$, $\beta/\sqrt{pq}$ appartient à $\mathbb{Q}$. (On pourra discuter suivant que β appartient à $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ou pas).
   (c) Donner la liste des
   sous-extensions de $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})/\mathbb{Q}$.
3. Calculer $(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2$. Déterminer le polynôme minimal de $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ sur $\mathbb{Q}$;

Exercice 2. Soit $P \in K[X]$ un polynôme de degré 4. Montrer que P est irréductible si et seulement si pour toute extension L/K de degré $\leqslant 2$, P n'a pas de racine dans L. Généraliser ce critère à un polynôme de degré n.

Exercice 3. Soient k un corps, $P \in k[X]$ un polynôme irréductible de degré $n \geqslant 2$ et K une extension de k de degré m avec $n \wedge m = 1$. Montrer que P est irréductible dans $K[X]$.

Exercice 4. Soient K un corps, P un polynôme de $K[X]$ de degré n et de racines $\alpha_1, ..., \alpha_n$ dans une clôture algébrique de K. On pose $L = K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Montrer que $[L : K] \leqslant n!$.

Exercice 5. Soit $P = X^3 + 2X + 2 \in \mathbf{Q}[X]$ et soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P.

1. Montrer que P est irréductible.
2. Exprimer $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{a^2+a+1}$ et $u = a^6 + 3a^4 + 2a^3 + 6a$ en fonction de 1, a et a^2.
3. Montrer que u est algébrique sur $\mathbf{Q}$ et déterminer son polynôme minimal.

Exercice 6. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'une extension finie L/K de corps infinis est monogène (i.e il existe $\alpha \in L$ tel que $L = K[\alpha]$) si et seulement si elle ne possède qu'un nombre fini d'extensions intermédiaires.

1. On suppose que L/K est monogène, $L = K[\alpha]$. Si P est le polynôme minimal de α sur K, montrer que l'on a une application injective de l'ensemble des extensions intermédiaires de L/K dans l'ensemble des diviseurs unitaires de P dans $L[X]$.
2. Réciproquement, si L/K ne possède qu'un nombre fini d'extensions intermédiaires, en considérant $\alpha, \beta \in L$, montrer que $K(\alpha, \beta)$ est monogène (on pourra regarder les extensions de la forme $K(\alpha + t\beta)$ pour $t \in K$). En déduire que L est monogène.

Exercice 7. Montrer que le polynôme minimal de $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ sur $\mathbb{Q}$ est réductible dans $\mathbf{F}_p[X]$ pour tout nombre premier p.