DM

Exercice 1 —[Un exemple d'espace vectoriel de dimension infinie]
Soit V un espace vectoriel, $W \subset V^*$ et $W^\top$ l'orthogonal de W, dont on rappelle la définition :

$$W^\top = \{v \in V | \forall f \in W; f(v) = 0\}.$$

Rappeler pourquoi dans le cas où V est de dimension finie, on a l'égalité $(W \cap L)^\top = W^\top + L^\top$.

Maintenant, considérons V l'espace vectoriel des suites réelles qui convergent. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a une application linéaire $\phi_n : V \to \mathbb{R}$ qui à une suite $\{x_k\}_k$ associe x_n. Notons L le sous-espace de V^* engendré par $\{\phi_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ et M le sous-espace engendré par $\{\phi_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Déterminer $(L \cap M)^\top$.

2. Montrer que $(L \cap M)^\top \neq L^\top + M^\top$.

Exercice 2 —[Classification des formes alternées] Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$, soit E un k-espace vectoriel de dimension finie n, et soit ϕ une forme bilinéaire alternée sur E.

1. On suppose $n = 2$ et ϕ non dégénérée. Montrer qu'il existe une base (e_1, f_1) de E telle que

$$\phi(e_1, e_1) = \phi(f_1, f_1) = 0, \phi(e_1, f_1) = 1.$$

2. Montrer que si n est impair, alors ϕ est dégénérée (on pourra procéder par récurrence).

3. On suppose $n = 2m$ et ϕ non dégénérée. Montrer qu'il existe une base $(e_1, f_1, \cdots, e_m, f_m)$ de E telle que

$$\phi(e_i, e_j) = \phi(f_i, f_j) = 0$$

et

$$\phi(e_i, f_j) = \delta_{ij}.$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

4. On ne fait plus d'hypothèse sur n ni ϕ. En considérant un supplémentaire F dans E de $\ker(\phi)$, montrer que $\phi_{|F}$ est non dégénérée, et en déduire qu'il existe une base $(e_1, f_1, \cdots, e_r, f_r, u_1, \cdots, u_s)$ de E, où r et s sont à définir, telle que

$$\phi(e_i, e_j) = \phi(f_i, f_j) = 0,$$

$$\phi(e_i, f_j) = \delta_{ij}$$

et

$$\phi(u_i, \cdot) = 0.$$