ÉNS de Lyon 2017-2018

Algèbre 1 L3

Corrigé du DM

Exercice 1 —[Un exemple d'espace vectoriel de dimension infinie]

Soit V est un espace vectoriel de dimension finie, et W et L deux sous-espaces de V^*. Montrons dans un premier temps l'inclusion $W^\perp + L^\perp \subset (W \cap L)^\perp$. Soit v un élément de $W^\perp + L^\perp$, et λ un élément de $W \cap L$. On a une décomposition $v = w + l$, où $w \in W^\perp$ et $l \in L^\perp$. En particulier, $\lambda(w) = 0$ et $\lambda(l) = 0$. Ainsi $\lambda(v) = \lambda(w) + \lambda(l) = 0$, d'où l'inclusion. Montrons ensuite que les deux espaces sont de même dimension, ce qui nous donnera l'égalité. Rappelons les trois égalités suivantes, valables pour tous sous-espaces F et G d'un espace vectoriel E de dimension finie :

$$\dim E = \dim F + \dim F^\perp \ ; \tag{1}$$

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \ ; \tag{2}$$

$$F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp \ ; \tag{3}$$

dont les vérifications sont immédiates.

En utilisant ces trois égalités, on obtient le résultat voulu :

$$\begin{aligned}
\dim(W^\perp + L^\perp) &\underset{(2)}{=} \dim W^\perp + \dim L^\perp - \dim(W^\perp \cap L^\perp) \\
&\underset{(1)}{=} (\dim V - \dim W) + (\dim V - \dim L) - \dim(W^\perp \cap L^\perp) \\
&\underset{(3)}{=} (\dim V - \dim W) + (\dim V - \dim L) - \dim(W + L)^\perp \\
&\underset{(1)}{=} (\dim V - \dim W) + (\dim V - \dim L) - (\dim V - \dim(W + L)) \\
&= \dim V - \dim W - \dim L + \dim(W + L) \\
&\underset{(2)}{=} \dim V - \dim(W \cap L) \\
&\underset{(1)}{=} \dim(W \cap L)^\perp.
\end{aligned}$$

1. Montrons que L et M sont d'intersection nulle. On remarque que les $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre de V^*. En effet, si $\phi = \Sigma\lambda_i\phi_i = 0$ où i

parcourt un sous-ensemble fini I de $\mathbb{N}$, alors pour tout $j \in I$, en notant e_j la suite dont le j-ème terme vaut 1 et les autres sont nuls, on a $\phi(e_j) = \lambda_j = 0$. Comme W et L sont engendrés par des sous-familles disjointes de cette famille libre, ils sont d'intersection nulle.

Ainsi, $(L \cap M)^\perp = \{0\}^\perp = V$.

2. Montrons que $L^\perp$ et $M^\perp$ n'engendrent pas l'espace V tout entier. Toute suite de $M^\perp$ a ses termes d'indice pair qui sont nuls, donc sa limite est nécessairement 0. De même, toute suite de $L^\perp$ tend vers 0. La limite d'une somme de deux suites étant la somme des limites, toutes les suites de $L^\perp + M^\perp$ tendent vers 0. Or, l'espace V contient des suites qui ne tendent pas vers 0.

Ainsi, $L^\perp + M^\perp \subsetneq (L \cap M)^\perp$.

Exercice 2 —[Classification des formes alternées]

1. Soit (e, f) une base quelconque de E. On a $\phi(e, e) = \phi(f, f) = 0$, et comme ϕ est non dégénérée, $\phi(e, f) = \lambda \neq 0$. La base $(e, \lambda^{-1} f)$ convient alors.

2. Pour $n = 1$, le résultat est clair puisque $\phi(e, e) = 0$ pour tout vecteur e de E. On suppose à présent le résultat vrai en dimension impaire $\leq n - 2$ et on va le montrer vrai en dimension impaire n. On suppose par l'absurde ϕ non dégénérée. Soit $e \in E \setminus \{0\}$. Alors il existe $f \in E$ tel que $\phi(e, f) = 1$, et la famille (e, f) est libre. On note alors $P = \mathrm{Vect}(e, f)$. Montrons que $E = P \oplus P^\perp$. Comme ϕ est non dégénérée, on a $\dim P^\perp = n - 2$, et on a juste besoin de montrer $P \cap P^\perp = \{0\}$. Soit $x = ae + bf \in P \cap P^\perp$. Alors $\phi(e, x) = b = 0$ et $\phi(f, x) = -a = 0$, d'où $x = 0$. Par hypothèse de récurrence appliquée à $P^\perp$, $\phi_{|P^\perp}$ est dégénérée, et donc il existe $x \in P^\perp \setminus \{0\}$ orthogonal à $P^\perp$. Il est donc alors orthogonal à E, ce qui contredit l'hypothèse.

On pouvait sinon remarquer que les formes alternées et antisymétriques coïncident puisque la caractéristique est différente de 2, et donc que la matrice d'une forme alternée dans une base quelconque était antisymétrique. En notant A une de ces matrices, on obtient $\det(A) = -\det(A)$ et donc la matrice n'est pas de rang maximal, ce qui implique que la forme alternée est dégénérée.

3. On va montrer le résultat par récurrence sur m. Le cas $m = 1$ a été traité lors de la première question. Supposons maintenant le résultat vrai en dimension $2m - 2$ et montrons le en dimension $2m$. Soit $e_1 \in E \setminus \{0\}$, et soit $f_1 \in E$ tel que $\phi(e_1, f_1) = 1$. Comme dans la question précédente, on montre que $P = \mathrm{Vect}(e_1, f_1)$ est un plan de E et que $E = P \oplus P^\perp$. Si B est une base quelconque de $P^\perp$, alors la matrice de ϕ dans la base (e_1, f_1, B) est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}$$

C'est une matrice diagonale par blocs inversible, donc M est inversible et donc la restriction de ϕ à $P^\perp$ est non dégénérée. On conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence.

4. Soit F un supplémentaire de $\ker(\phi)$ dans E. Soit $x \in \ker(\phi_{|F})$, i.e. tel que $\phi(x, \cdot) = 0$ sur F. Pour tout $y \in E$, on a une décomposition $y = y_F + y'$ où $y' \in \ker(\phi)$, donc $\phi(x, y) = \phi(x, y_F) + \phi(x, y') = 0$. Ainsi, $x \in \ker(\phi) \cap F = \{0\}$; $\phi_{|F}$ est non dégénérée. Si on prend une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus \ker(\phi)$ et qu'on utilise la question précédente à $\phi_{|F}$, on obtient le résultat.